UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK2510 — Skadeforsikring og risiko.
Eksamensdag:	Torsdag 14. juni 2007.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Liste med formler inkluderes i oppgavesettet.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Alle oppgavene teller likt: 5 poeng.

Oppgave 1.

Betrakt følgende brannforsikringsdata til Copenhagen Reinsurance i perioden fra 09/01/1990 til 10/01/1990:

Dato	Krav i DKM
09/08/1990	14.851485
09/11/1990	1.596535
09/15/1990	3.877888
09/19/1990	2.021452
09/20/1990	1.650165
09/27/1990	1.010726
09/27/1990	1.485149
09/30/1990	1.278878
10/01/1990	1.023102
10/01/1990	4.702970

(Fortsettes side 2.)

Brannforsikringskravene X_i i tabellen er uttrykt i millioner av danske kroner. Anta at tiden W_i mellom to krav (inter-arrival time) er beskrevet av Cramér-Lundberg-modellen.

Beregn maximum-likelihood-estimaten $\widehat{\lambda}$ til hoppeintensiteten av kravtellingsprosessen $N(t)$.

Hint: Krav $X_1^{(m)}, ..., X_n^{(m)}$ som ankommer på dag $m \geq 0$ bør tolkes som ett krav $X_m := \sum_{i=1}^{n} X_i^{(m)}$ på dag m.

Oppgave 2.

Betrakt en portfølje av brannforsikringskontrakter med totalskadesum gitt av

$$S = \sum_{j=1}^{N} X_j.$$

på tidspunkt $t = 1$ dag. Anta at kravantallet N er binomialfordelt med parametre $m = 5$ og $p = \frac{1}{4}$, dvs. $N \sim Bin(5, \frac{1}{4})$. Dessuten kreves at N er uavhengig av de $i.i.d$ brannkravene $(X_j)_{j\geq 1}$. Fellesfordelingen til X_j er spesifisert av

$$P(X_j = 0) = 0 \quad P(X_j = 1) = \tfrac{7}{10} \quad P(X_j = 2) = \tfrac{1}{4} \quad P(X_j = 5) = \tfrac{1}{20}$$

for alle $j \geq 1$. Kravene er uttrykt i millioner av danske kroner.

Bruk rekursjonen til Panjer for å beregne den eksakte totalskadefordelingen, dvs.

$$P(S \leq n)$$

for $n = 0, ..., 3$ i millioner av danske kroner.

Oppgave 3.

Anta at totalskadesummen av en portfølje av brannforsikringskontrakter er gitt av

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j.$$

på tidspunkt t. Det forutsettes at $S(t)$ er beskrevet av Crámer-Lundberg-modellen. Kravtellingsprosessen $N(t)$ er en Poissonprosess med hoppeintensitet $\lambda = 0.3$. Dessuten er brannkravene $(X_j)_{j\geq 1}$ $i.i.d$ med fellesfordeling gitt

(Fortsettes side 3.)

av

$$P(X_j = 0) = 0 \qquad P(X_j = 1) = \frac{9}{20} \qquad P(X_j = 2) = \frac{9}{20}$$
$$P(X_j = 3) = \frac{9}{100} \qquad P(X_j = 10) = \frac{1}{100}$$

for alle $j \geq 1$. Valutaen til X_j er basert på millioner av danske kroner.

Beregn nettopremien til en excess-of-loss reforsikring, dvs.

$$E\left[R_{ExL}(t)\right],$$

hvor

$$R_{ExL}(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} (X_j - D)_+$$

for $t = 365$ dager og deductible $D = 3$ i millioner av danske kroner.

Oppgave 4.

Anta at vi har to portføljer av brannforsikringskontrakter med totalskadesummer modellert av

$$S_i(t) = \sum_{j=1}^{N_i(t)} X_j^{(i)}, \ i = 1, 2.$$

Kravtellingsprosessene $N_1(t)$ og $N_2(t)$ er beskrevet av homogene Poissonprosesser med intensitet $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ og $\lambda_2 = \frac{3}{5}$, respektive. Det kreves at $N_i(t)$ er uavhengig av de $i.i.d$ brannkravene $(X_j^{(i)})_{j\geq 1}$ for $i = 1, 2$. Dessuten er det antatt at totalskadesummene er uavhengige og at kravene i de tilsvarende portføljene har følgende fordelinger:

$$P(X_j^{(1)} = 0) = 0 \quad P(X_j^{(1)} = 1) = \tfrac{1}{4} \quad P(X_j^{(1)} = 2) = \tfrac{3}{4}$$
$$P(X_j^{(2)} = 0) = 0 \quad P(X_j^{(2)} = 2) = \tfrac{2}{3} \quad P(X_j^{(2)} = 3) = \tfrac{1}{3}$$

for alle $j \geq 1$. Valutaen er i millioner av danske kroner.

Finn ved hjelp av Panjerformelen den eksakte fordelingen til den samlede totalskadesummen, dvs. av

$$P(\widetilde{S}(t) \leq n),$$

hvor

$$\widetilde{S}(t) = S_1(t) + S_2(t)$$

for $n = 0, ..., 3$ i millioner av danske kroner og $t = 1$ dag.

Hint: Bruk "mixture distributions".

Slutt

(Fortsettes side 4.)

Vedlegg: Liste med formler

a) Tetthetsfunksjonen $f(x)$ til eksponentialfordelingen $Exp(\lambda)$ med intensiteten $\lambda > 0$ er gitt av

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0.$$

b) Likelihood funksjon til Exp(λ) :

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(W_i)$$

med $i.i.d$ eksponentialfordelte W_i.

c) $N \sim \text{Bin}(m, p)$, hvis

$$P(N = k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k},\ k = 0, ..., m.$$

d) $N \sim \text{Pois}(\lambda)$, hvis

$$P(N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, ...$$

e) Panjerrekursjon:

$$p_n = \frac{1}{1 - aP(X_1 = 0)} \cdot \sum_{i=1}^{n} (a + \frac{b \cdot i}{n}) \cdot P(X_1 = i) \cdot p_{n-i},\ n \geq 1,$$

hvor $p_n := P(S = n)$ med begynnelsesverdi $p_0 := P(N = 0)$ og parametre a, b gitt av

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & a = \frac{-p}{1-p},\ b = -a \cdot (m+1) & \text{, hvis } N \sim \text{Bin}(m, p) \\ \text{(ii)} & a = 0,\ b = \lambda & \text{, hvis } N \sim \text{Pois}(\lambda) \end{array}$$

f) Mixture distribution:

$$P(Y_1 = x) = p_1 P(X_1^{(1)} = x) + p_2 P(X_1^{(2)} = x)$$

med

$$p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2},\ i = 1, 2.$$

SLUTT