UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK2510 — Skadeforsikring og risiko.
Eksamensdag:	Torsdag 12. juni 2008.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Det oppgis for mulig bruk i disse oppgavene at

$$\int_a^{a+b} (z-a) f(z)\, dz + \int_{a+b}^{\infty} b f(z)\, dz = \int_a^{a+b} \{1 - F(z)\}\, dz$$

der $F(z)$ er den kumulative fordelingsfunksjonen til en sannsynlighetstetthet $f(z)$ og at

$$E(e^{aG}) = e^{a^2/2} \qquad \text{dersom} \qquad G \sim N(0,1).$$

Oppgave 1.

La μ være årlig skadeintensitet og ξ_z forventet utbetaling per hendelse. Selve skadebeløpet per hendelse Z er eksponentielt fordelt.

a) Hva blir da den rene premie? Hvor mye må en kunde betale i årlig premie dersom markedet tillater et selskap å ta 50% mer enn dette?

b) Utled den rene premie ved en re-forsikring der kontrakten er av type $a \times b$ og anvendes per hendelse.

c) Hva blir den rene premie i b) dersom inflasjon får kostnadene per hendelse til å vokse med 50% og grensene a og b justeres i takt med inflasjonen?

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

Anta at årlig skadefrekvens μ og forventet utbetaling ξ_z per skade avhenger av alder x gjennom regresjonsmodellen

$$\log(\mu) = a - b(x - x_0) \qquad \text{og} \qquad \log(\xi_z) = c - d(x - x_0)$$

der a, b, c og d er kjente koeffisienter og x_0 en kjent alder. Tenk deg at dette er motorvognforsikring.

a) Hva blir den rene premie i alder x?

Anta at $a = -1.89$, $b = 0.025$, $c = 0$, $d = 0$ og $x_0 = 20$.

b) I hvilken alder er da den rene premien sunket til det halve av hva den er i alder 20?

Anta at vi befinner oss i et land der det er ulovlig å diskriminere mot alder, dvs. det er ulovlig å ta ulik premie i ulik alder. Samtidig tillater markedet et premienivå på denne type forsikring på $\pi = 0.18$ (altså den samme i alle aldre). Tallene for a, b, c, d og x_0 er dem ovenfor.

c) Forklar hvorfor et selskap som krever et premiepåslag ("loading") på 30% vil skubbe ut de yngste bileierne og nekte å tegne forskringskontrakter med dem. Opp til hvilken alder vil forsikring bli nektet?

Oppgave 3.

Vi skal i denne oppgaven analysere en skadeforsikringsportefølje med total utbetaling

$$\mathcal{X} = Z_1 + \ldots + Z_{\mathcal{N}}$$

der

$$\mathcal{N} \sim \text{Poisson}(\lambda), \qquad Z_i = \xi_z e^{-\tau_z^2/2 + \tau_z G_i}, \;\; G_i \sim N(0,1), \;\; i = 1, 2, \ldots.$$

Poisson-parameteren er stokastisk og følger modellen

$$\lambda = \xi_\lambda e^{-\tau_\lambda^2/2 + \tau_\lambda G}, \;\; G \sim N(0,1).$$

Faste parametre er ξ_λ,τ_λ, ξ_z og τ_z. Vi gjør de vanlige antakelsene om uavhengighet.

a) Lag et simuleringsprogram for $\mathcal{X}$.

b) Forklar hvordan programmet gir deg anslag for reserven. Hvordan brukes programmet når λ er en fast, ikke-stokastisk størrelse?

(Fortsettes side 3.)

Beregninger av reserven er gjennomført for $\xi_z = 1$, $\tau_z = 1$ under følgende to modeller for $\mathcal{N}$:

$$\underset{\textit{Model I}}{\lambda = 50 \ \text{(fast)}} \qquad \underset{\textit{Model II}}{\xi_\lambda = 50, \ \ \tau_\lambda = 0.473}$$

Med 100000 simuleringer ga dette følgende resultater:

Modell X		Modell Y	
95% reserve	99% reserve	95% reserve	99% reserve
102.5	141.3	70.6	82.5

c) Hvilken modell hører til hvilket par med reserver? Kort begrunnelse! Kommenter tallene ytterligere hvis du kan.

d) Hvordan kan du modifisere programmet i a) slik at det simulerer risikoen $\mathcal{X}^{\text{re}}$ for en re-forsikrer som gjennom en $a \times b$ kontrakt anvendt på $\mathcal{X}$ har tatt over deler av de opprinnelige utbetalingene?

Kontrakten $a = 60$ og $b = \infty$ ga følgende resultater for $\mathcal{X}^{\text{re}}$:

Modell X			Modell Y		
$\bar{\mathcal{X}}^{\text{re}*}$	95% reserve	99% reserve	$\bar{\mathcal{X}}^{\text{re}*}$	95% reserve	99% reserve
7.01	42.5	81.3	1.50	10.6	22.5

der $\bar{\mathcal{X}}^{\text{re}*}$ er gjennomsnittsverdien av $\mathcal{X}^{\text{re}}$-simuleringene. Igjen er det brukt 100000 simuleringer.

e) Hva blir den rene premie for re-forsikringen under de to modellene? Diskuter kort virkningen på re-forsikringsberegningene av å gjøre λ stokastisk.

Oppgave 4.

Dette er er en teoretisk oppfølging av de samme modellene som i foregående oppgave.

a) Utled under Modell I matematiske utrykk for $E(\mathcal{X})$ og $\text{sd}(\mathcal{X})$ ved å bruke reglene om dobbelforventning og dobbelvarians.

b) Skriv opp et utrykk for normalfordelingstilnærmelsen q_ϵ^{No} for reserven ved nivå $1 - \epsilon$.

Under Modell II blir q_ϵ^{No} stokastisk (fordi den avhenger av en stokastisk λ).

c) Finn et matematisk utrykk for $E(q_\epsilon^{\text{No}})$. Hvordan avhenger det av τ_λ? Kommentarer?

SLUTT