UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	STK2510 — Skadeforsikring og risiko
Eksamensdag:	8. juni 2010
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Formelark (1 side)
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 1. (5 poeng)

Anta at totalskadesummen av en portefølje av brannforsikringskontrakter er gitt ved

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j$$

på tidspunkt t. Det forutsettes at $S(t)$ er beskrevet av Crámer-Lundberg-modellen. Kravtellingsprosessen $N(t)$ er en Poissonprosess med hoppeintensitet $\lambda = 0.4$. Dessuten er brannkravene $(X_j)_{j\geq 1}$ *i.i.d* med fellesfordeling gitt ved

$$P(X_j = 0) = 0 \quad P(X_j = 1) = \tfrac{7}{20} \quad P(X_j = 2) = \tfrac{7}{20} \quad P(X_j = 3) = \tfrac{29}{100} \quad P(X_j = 9) = \tfrac{1}{100}$$

for alle $j \geq 1$. Kravene X_j er gitt i millioner av danske kroner.

Beregn nettopremien til en excess-of-loss reforsikring, dvs.

$$E\left[R_{ExL}(t)\right],$$

hvor

$$R_{ExL}(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} (X_j - D)_+$$

for $t = 365$ dager og deductible $D = 2.5$ i millioner av danske kroner.

Oppgave 2. (5 poeng)

Betrakt følgende brannforsikringsdata til Copenhagen Reinsurance i perioden fra 06/01/1989 til 06/16/1989:

Dato	Krav i DKM
06/02/1989	2.032176
06/04/1989	4.022015
06/05/1989	1.121931
06/08/1989	1.879763
06/11/1989	2.201524
06/11/1989	1.270110
06/12/1989	1.734124
06/13/1989	1.168501
06/13/1989	6.773920
06/16/1989	1.176969

Brannforsikringskravene X_i i tabellen er uttrykt i millioner av danske kroner. Anta at tiden W_i mellom to krav (inter-arrival time) er beskrevet av Cramér-Lundberg-modellen.

(i) Beregn maximum-likelihood-estimatet $\widehat{\lambda}$ til hoppeintensiteten av kravtellingsprosessen $N(t)$.

(ii) Estimer $E[X_1]$ ved hjelp av den empiriske forventningsverdien (sample mean) og bestem den forventede totalskadesummen $E[S(t)]$ for $t = 1$ (år).

(Fortsettes på side 3.)

Hint: Krav $X_1^{(m)}, ..., X_n^{(m)}$ som ankommer på dag $m \geq 0$ bør tolkes som ett krav $X_m := \sum_{i=1}^{n} X_i^{(m)}$ på dag m.

Oppgave 3. (5 poeng)

Betrakt en porteføljе av brannforsikringskontrakter med totalskadesum gitt ved

$$S = \sum_{j=1}^{N} X_j$$

på tidspunkt $t = 1$. Anta at kravantallet N er binomialfordelt med parametre $m = 7$ og $p = \frac{1}{3}$, dvs. $N \sim Bin(7, \frac{1}{3})$. Dessuten kreves at N er uavhengig av de $i.i.d$ brannkravene $(X_j)_{j\geq 1}$. Fellesfordelingen til X_j er spesifisert av

$$P(X_j = 0) = 0 \quad P(X_j = 1) = \tfrac{8}{10} \quad P(X_j = 2) = \tfrac{3}{20} \quad P(X_j = 7) = \tfrac{1}{20}$$

for alle $j \geq 1$. Kravene er uttrykt i millioner av danske kroner.

Beregn den eksakte totalskadefordelingen, dvs.

$$P(S \leq n)$$

for $n = 0, ..., 4$ i millioner av danske kroner.

Oppgave 4. (5 poeng)

Anta at vi har to porteføljer av brannforsikringskontrakter med totalskadesummer modellert av

$$S_i(t) = \sum_{j=1}^{N_i(t)} X_j^{(i)}, \ i = 1, 2.$$

Kravtellingsprosessene $N_1(t)$ og $N_2(t)$ er beskrevet som homogene Poissonprosesser med intensitet $\lambda_1 = \frac{1}{5}$ og $\lambda_2 = \frac{2}{3}$, respektive. Det kreves at $N_i(t)$ er uavhengig av de $i.i.d$ brannkravene $(X_j^{(i)})_{j\geq 1}$ for hver $i = 1, 2$. Dessuten er det antatt at totalskadesummene er uavhengige og at kravene i de tilsvarende porteføljene har følgende fordelinger:

$$\begin{array}{lll} P(X_j^{(1)} = 0) = 0 & P(X_j^{(1)} = 1) = \frac{2}{7} & P(X_j^{(1)} = 2) = \frac{5}{7} \\ P(X_j^{(2)} = 0) = 0 & P(X_j^{(2)} = 2) = \frac{3}{5} & P(X_j^{(2)} = 3) = \frac{2}{5} \end{array}$$

for alle $j \geq 1$. Valutaen er i millioner av danske kroner.

Bestem ved hjelp av Panjerformelen den eksakte fordelingen til den samlede totalskadesummen, dvs. av

$$P(\widetilde{S}(t) \leq n),$$

hvor

$$\widetilde{S}(t) = S_1(t) + S_2(t)$$

for $n = 0, ..., 3$ i millioner av danske kroner og $t = 1$.

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 5. (5 poeng)

La $(X_i)_{i\geq 1}$ være en *i.i.d*-følge av brannkrav med fellestetthetsfunksjon g. Dessuten la $R(n)$, $n \geq 1$ være følgen av "rekordtidspunkt" definert som

$$R(n+1) := \inf\left\{k > R(n) : X_k > X_{R(n)}\right\}$$

for $n \geq 1$, hvor $R(1) := 1$ og $\inf \varnothing := \infty$, dvs. på tidspunkt $R(n)$ observeres den nye brannkravrekorden $X_{R(n)}$. Anta at $L(n)$ er antallet av rekorder i en stikkprøve av et omfang n, dvs.

$$L(n) := \#\left\{1 \leq i \leq n : R(i) \leq n\right\}$$

for $n \geq 1$ ($\#A$ er lik antallet av elementer i en mengde A).

(i) Utled en formel for $E[L(n)]$, $Var[L(n)]$ og beregn $E[L(7)]$, $Var[L(7)]$.

(ii) Hva er $\lim_{n\longrightarrow\infty} E[L(n)]$ og $\lim_{n\longrightarrow\infty} Var[L(n)]$?

Slutt

(Fortsettes på side 5.)

Vedlegg: Formelark

a) Tetthetsfunksjonen $f(x)$ til eksponentialfordelingen $Exp(\lambda)$ med intensiteten $\lambda > 0$ er gitt av

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0.$$

b) Likelihood-funksjon til $Exp(\lambda)$:

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(W_i)$$

med $i.i.d$ eksponentialfordelte W_i.

c) $N \sim Bin(m, p)$, hvis

$$P(N = k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k},\ k = 0, ..., m.$$

d) $N \sim Pois(\lambda)$, hvis

$$P(N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, ...$$

e) Panjerformel:

$$p_n = \frac{1}{1 - aP(X_1 = 0)} \cdot \sum_{i=1}^{n} (a + \frac{b \cdot i}{n}) \cdot P(X_1 = i) \cdot p_{n-i},\ n \geq 1,$$

hvor $p_n := P(S = n)$ med begynnelsesverdi $p_0 := P(N = 0)$ og parametre a, b gitt av

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & a = \frac{-p}{1-p},\ b = -a \cdot (m+1) & \text{, hvis } N \sim Bin(m, p) \\ \text{(ii)} & a = 0,\ b = \lambda & \text{, hvis } N \sim Pois(\lambda) \end{array}$$

f) Mixture distribution:

$$P(Y_1 = x) = p_1 P(X_1^{(1)} = x) + p_2 P(X_1^{(2)} = x)$$

med

$$p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2},\ i = 1, 2.$$