Økonomisk Institutt, november 2004
Robert G. Hansen, rom 1208

Oppsummering av forelesningen 10.11.04
Spillteori (S & W kapittel 12 og 19)

Fangens dilemma

Spillteori er et effektivt verktøy for analyse av strategisk adferd. Et sentralt utgangspunkt for spillteoretisk analyse er at bevisste aktører forstår at de er i en situasjon der de gjensidig påvirker hverandre gjennom sine handlinger og strategier. Markedsmodellene fri konkurranse og monopol er eksempler på tilfeller der spillteori *ikke* bidrar med økt innsikt, ettersom produsentene og konsumentene enten tilpasser seg passivt til markedsprisen (fri konkurranse), eller produsenten bestemmer prisen (monopol) og konsumentene tilpasser seg den. I begge tilfeller er det unødvendig med strategiske overveielser av noe slag. Erik Grønn uttrykker det slik: ”Det å treffe de riktige beslutningene i de tradisjonelle modellene (”pris = grensekostnad”) krever omtrent den intellektuelle dybde og modenhet som vi forventer av en brusautomat.”

I spillteori studeres hvordan enkeltaktører, eksempelvis produsenter, tilpasser seg når *hver enkelt må ta hensyn til de andre aktørenes reaksjoner* under bestemmelsen av sin egen tilpasning. Aktørene forutsettes å være *bevisste* og *rasjonelle*, og å ta hensyn til andre aktøreres bevissthet og rasjonalitet ved sin egen tilpasning (mer om dette lenger ned).

Med *Nash-likevekt* mener vi en situasjon der ingen aktør har ønske om å endre sin egen tilpasning, gitt den andre aktørens tilpasning (dvs. ”ingen angrer”). Med andre ord kjennetegnes en Nash-likevekt av at ingen av spillerne ville ha endret strategi selv om de fikk muligheten til det i ettertid.

En aktør sies å ha en *dominant strategi* dersom aktøren kommer best ut ved å velge denne strategien *uavhengig* av hva den andre aktøren gjør. En tilstrekkelig betingelse for at en Nash-likevekt skal eksistere, er at *minst en* av aktørene har en dominant strategi.

Som en illustrasjon kan vi tenke oss et marked med kun to produsenter, som produserer den samme homogene varen. Anta at profitten de oppnår avhenger av om de samarbeider eller fører priskrig. Et mulig tilfelle kan eksempelvis være som i tabellen under, der tallet over den skrå streken er profitten for aktør A (Π^A), og tallet under er profitten for aktør B (Π^B).

	Aktør B		
Aktør A	Π^A / Π^B	SAMARBEID (S)	PRISKRIG (K)
	SAMARBEID (S)	3 / 3	1 / 4
	PRISKRIG (K)	4 / 1	2 / 2

Vi finner Nash-likevekten ved å undersøke hvilken strategi hver av produsentene vil velge avhengig av motpartens valg:

- For A: (i) Hvis B velger "S" $\Rightarrow$ velg "K"
  (ii) Hvis B velger "K" $\Rightarrow$ velg "K"

- For B: (i) Hvis A velger "S" $\Rightarrow$ velg "K"
  (ii) Hvis A velger "K" $\Rightarrow$ velg "K"

Vi ser at eneste stabile likevektspunkt er kombinasjonen 2 / 2, dvs. begge aktørene velger priskrig. Dette til tross for at begge ville kommet bedre ut dersom de valgte samarbeid, og kunne stole på at motparten valgte det samme. Situasjonen over refereres ofte til som *fangens dilemma* ("prisoner's dilemma").

Situasjonen over gir et eksempel på hvordan vi kan modellere mulige konflikter mellom individuell og kollektiv rasjonalitet. Vi ser at i slike situasjoner vil individuell rasjonalitet gi kollektiv irrasjonalitet. Det er med andre ord ingen fordel at begge aktørene er intelligente!

Et annet eksempel er det tradisjonelle fangens dilemma: To forbrytere som har samarbeidet om en kriminell handling, anholdes av politiet. De avhøres hver for seg, og får begge beskjed om at det foreligger ufullstendig bevismateriale, men nok til å gi begge en dom på 1 års fengsel. Imidlertid tilbyr påtalemyndigheten betinget dom, dvs. 0 års fengsel, til den part som tilstår, dersom motparten ikke tilstår. Motparten vil i dette tilfellet få en dom på 10 års fengsel. Dersom begge tilstår faller tilbudet fra påtalemyndigheten bort, og begge vil idømmes en straff på 6 års fengsel. Situasjonen kan illustreres som i tabellen under, der Roberts fengselsstraff står over skråstreken, og Trygves fengselsstraff står under skråstreken.

	TRYGVE		
ROBERT	R/T	NEKTE	TILSTÅ
	NEKTE	1 / 1	10 / 0
	TILSTÅ	0 / 10	6 / 6

Både Robert og Trygve har ”tilstå” som dominant strategi – uansett hva den andre gjør vil begge hver for seg minimere egen straff ved å tilstå. Nash-likevekten er dermed gitt ved at begge tilstår. Fra Roberts og Trygves ståsted er en slik løsning imidlertid ikke Pareto-optimal. Begge kunne fått lavere straff hvis de hadde klart å samarbeide om å nekte, men det er altså i konflikt med individuell rasjonalitet.

I eksemplene over hadde begge aktørene dominante strategier, det vil si et sett av planlagte handlinger som alltid sikret den enkelte aktør det beste resultatet *uansett* hva motparten valgte. Legg merke til at dette altså gir Nash-likevekt - Nash-likevekt *krever* likevel ikke dominante strategier hos begge aktørene. Dominante strategier er med andre ord en tilstrekkelig, men *ikke* nødvendig betingelse for Nash-likevekt. Eksemplet under illustrerer:

AKTØR A	AKTØR **B**		
	Π^A/Π^B	Samarbeid	Priskrig
	Samarbeid	350/275	50/375
	Priskrig	320/60	175/185

Profitt avhengig av samarbeid/priskrig for to aktører

I dette tilfellet eksisterer det ingen dominant strategi for aktør A. Aktør B har imidlertid priskrig som dominant strategi. Nash-likevekt oppnås ved Π^A/Π^B = 175 / 185, det vil si begge aktørene velger priskrig.

Kort om mulige mekanismer og tiltak for å overkomme Nash-likevekten i "fangens dilemma" – spill:

(i) *Altruisme*: Den enkelte aktør tar tilstrekkelig hensyn til motpartens utfall (er opptatt av motpartens "ve og vel") til at Pareto-optimum realiseres.

(ii) *Straffemekanismer*: Partene inngår en troverdig avtale om å velge den strategien som realiserer Pareto-optimum. Den parten som eventuelt bryter avtalen vil bli utsatt for en straff som ikke gjør avtalebrudd lønnsomt.

(iii) "*Tit-for-tat*" ved gjentatte spill: Den ene aktøren annonserer på en troverdig måte at han vil velge "samarbeid" i første spilleomgang, og at han neste gang spillet skal spilles vil velge den strategien motparten valgte i første spilleomgang.

Definisjoner og presiseringer

Spill defineres altså som studiet av samspillet mellom bevisste og rasjonelle aktører, som alle tar hensyn til de andre aktørenes reaksjoner ved valg av egen tilpasning. Følgende liste over karakteristika gir en mer presis avgrensning av hvilke problemstillinger som kan analyseres ved spillteoretiske modeller:

1) En fast mengde spillere (aktører)
2) En fast mengde mulige handlinger for hver spiller, og en fast mengde mulige strategier (sett av planlagte handlinger) som angir hvilken handling hver spiller vil velge på hvert stadium i spillet
3) En fast bestemt trekkrekkefølge
4) En fastlagt informasjonsstruktur hos spillerne (dvs. hvem som vet hva)
5) Kjente sammenhenger mellom spillernes strategier og de forskjellige utfall (hva som skjer når......)
6) Alle spillerne har preferanser over mulige utfall (eksempelvis maks nytte eller maks profitt)
7) Alle spillerne kjenner punktene 1) – 6), og enhver spiller vet at de andre spillerne også kjenner punktene 1) – 6)

Dersom punktene 1) – 7) er tilfredsstilt *har* vi altså et spill. Hvordan ulike spill kan presenteres og analyseres nærmere, avhenger av nedenstående *klassifisering* av spill:

i) Antall mulige deltakere
   a) To-person spill
   b) Fler-person spill

ii) Grad av konflikt
   a) Nullsum-spill: Diamentralt motsatte preferanser
   b) Variabelsum-spill: Mer eller mindre sammenfallende preferanser (eksempelvis fangens dilemma spill)

iii) Grad av mulig samarbeid

a) Ikke-kooperative spill: Beslutninger om strategivalg og handlinger hos spillerne skjer uavhengig av hverandre

b) Kooperative spill: Samarbeid er mulig

iv) Trekkrekkefølge

a) Simultane trekk: Samtidige handlinger

b) Sekvensielle trekk: Spillernes handlinger foregår i en bestemt rekkefølge

v) Antall spille-omganger

a) Én-periode spill

b) Fler-periode spill

Vi har så langt sett på ikke-kooperative, to-person variablesum-spill, med simultane trekk og én periode. Vi skal i neste avsnitt utvide analysen, ved å studere eksempler på spill med sekvensielle trekk.

I tilfellet med sekvensielle trekk, er det ofte hensiktsmessig å presentere spillet på såkalt *ekstensiv form*, dvs. ved hjelp av et *beslutningstre* ("decision tree"). Like fullt kan imidlertid også slike spill presenteres på såkalt *normal form* eller strategisk form ("payoff matrix"), altså ved hjelp av tabeller, slik vi har gjort hittil.

Anta at vi har en situasjon med to spillere, A og B, som hver kan velge mellom to strategier - henholdsvis (α_1 og α_2) for A, og (β_1 og β_2) for B. Spillet er ikke-kooperativt, og det er sekvensielle trekk. Π_{ij}^{A} angir utfallet for A når A velger α_i og B velger β_j. Tilsvarende angir Π_{ij}^{B} utfallet for B når B velger β_j og A velger α_i.

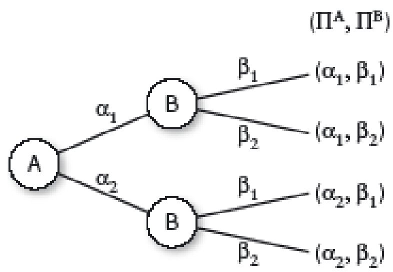
På normal form kan spillet presenteres slik:

B

A

Π^A / Π^B	β_1	β_2
α_1	α_1 / β_1	α_1 / β_2
α_2	α_2 / β_1	α_2 / β_2

I tilfellet der A trekker først, får vi så på ekstensiv form:



Definisjon Nash-likevekt: En situasjon der ingen aktør har ønske om å endre sin tilpasning, gitt alle de andre aktørenes tilpasning.

Presisering I tilfellet med to spillere A og B, der A har strategivalgene ($\alpha_1, \alpha_2, .. \alpha_i .. \alpha_n$) og B har strategivalgene ($\beta_1, \beta_2, .. \beta_j .. \beta_n$), vil *strategiprofilen* (α_i, β_j) være en Nash-likevekt hvis og bare hvis:

1) α_i er A's beste strategi, gitt at B har valgt β_j

   og

2) β_j er B's beste strategi, gitt at A har valgt α_i .

Vi har tidligere sett at dersom én eller begge aktørene har *dominante strategier,* vil spillet ha en *entydig Nash-likevekt*.

Merknad 1: Ved sekvensielle trekk kalles likevekten for *delspillperfekt* likevekt.

Definisjon dominant strategi: Et sett av planlagte handlinger som sikrer den enkelte aktør det beste utfallet, *uansett* hva de andre aktørene velger.

Presisering: I tilfellet med to spillere A og B, vil α være en dominant strategi for A hvis α gir A det beste resultatet uansett hva B gjør.

Sekvensielle trekk

Dersom ingen av spillerne har dominante strategier, kan det eksistere multiple Nash-likevekter, uten at noen av disse nødvendigvis realiseres. Følgende eksempel illustrerer (begge aktørene har som målfunksjon å maksimere eget utfall, gitt ved Π^A for aktør A og Π^B for aktør B):

B

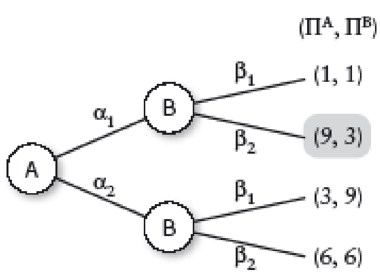
	Π^A / Π^B	β_1	β_2
A	α_1	$1/1$	$9/3$
	α_2	$3/9$	$6/6$

Verken A eller B har dominante strategier.

$\Rightarrow$ Nash-likevekt: (α_1, β_2) og (α_2, β_1)

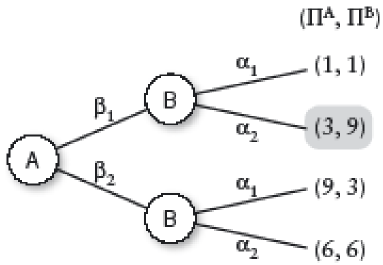
Dersom vi i eksemplet over antar *sekvensielle trekk*, vil spillet på ekstensiv form se slik ut, avhengig av trekkrekkefølgen:

A) Hvis A trekker først:



$\Rightarrow$ Delspillperfekt likevekt: $(\alpha_1, \beta_2) = (9,3)$

B) Hvis B trekker først:



$\Rightarrow$ Delspillperfekt likevekt: $(\alpha_2, \beta_1) = (3{,}9)$

I eksemplet over ser vi hvordan en omgjøring fra simultane til sekvensielle trekk kan redusere eventuelle multiple Nash-likevekter til entydige delspillperfekte likevekter, i spill uten dominante strategier.

Det kan også tenkes tilfeller der det i spill uten dominante strategier *ikke* eksisterer noen likevekter ved simultane trekk, mens en omgjøring til sekvensielle trekk fører til entydig delspillperfekt likevekt. Eksemplet under illustrerer:

B

A

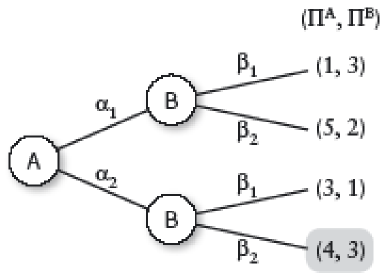
Π^A / Π^B	β_1	β_2
α_1	1/3	5/2
α_2	3/1	4/3

Simultane trekk

Ingen av aktørene har dominante strategier. Det eksisterer ingen Nash-likevekt.

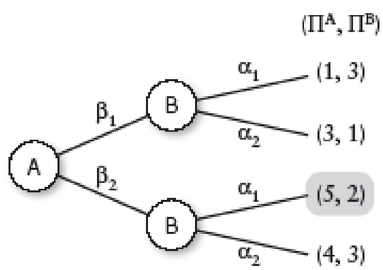
Formulerer vi spillet på nytt under antakelsen om sekvensielle trekk, får vi følgende:

A) Hvis A trekker først:



$\Rightarrow$ Delspillperfekt likevekt: $(\alpha_2, \beta_2) = (4{,}3)$

B) Hvis B trekker først:



$\Rightarrow$ Delspillperfekt likevekt: $(\alpha_1, \beta_2) = (5{,}2)$

Merknad 2: Det er altså ikke nødvendigvis en fordel å trekke først ved sekvensielle trekk. I det første av de to siste eksemplene var det en fordel å trekke *først* - i det siste eksemplet var det en fordel å trekke *sist*.