Indifferenskurver, nyttefunksjon og nyttemaksimering

Arne Rogde Gramstad
Universitetet i Oslo

18. oktober 2013

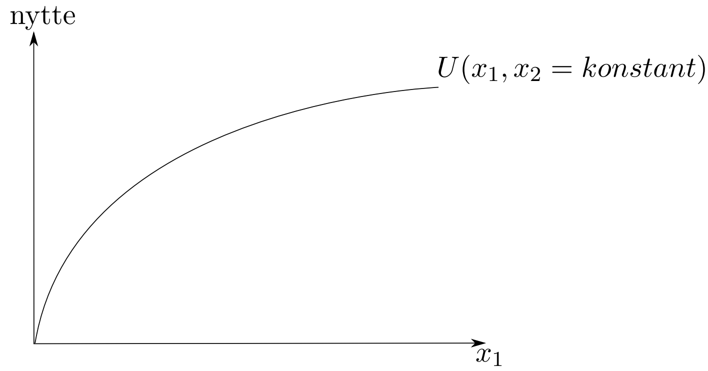
En indifferenskurve viser alle godekombinasjoner som en konsument er likegyldig (indifferent) mellom. Alternativt kan man si at et konsument har samme *nytte* på alle punkter på indifferenskurven. I dette notatet bruker jeg konkrete talleksempler for illustrere konsumentens tilpasning.

1 Nyttefunksjon

I to-gode-eksemplet antas at en konsument har en *nyttefunksjon* $U(x_1, x_2)$. For et gitt konsum av vare 1 og vare 2 gir nyttefunksjonen en verdi som er et mål på hvor bra konsumenten har det.

Nyttefunksjonen antas å være konkav. Det vil si at man får en stor nytteøkning når man øker konsumet av noe man i utgangspunktet har lite av (høy *marginalnytte*), og likeledes får man en liten nytteøkning når man øker konsumet av noe man i utgangspunktet har mye av (lav *marginalnytte*). Intuisjonen bak den konkave nyttefunksjonen er ekvivalent til antakelsen om fallende etterspørselskurve. En konsument er villig til å betale lite for én ekstra enhet hvis man i utgangspunktet har mye av godet (lav marginal betalingsvillighet), og er villig til å betale mye for én ekstra enhet hvis man i utgangspunktet har lite av (høy marginal betalingsvillighet).

Naturlig nok vil en konsument ha høy betalingsvillighet for en vare hvis økt konsum fører til en stor nytteøkning, og betalingvilligheten vil være lav hvis økt konsum fører til en liten nytteøkning. En konkav nyttefunksjon er illustrert i figur 1.



Figur 1: En konkav nyttefunksjon

1.1 Talleksempel

Vi antar at nyttefunksjonen er gitt ved $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$. Vi kan sette inn for diverse konsumkombinasjoner av vare 1 og vare 2. Nyttefunksjonen vil da gi oss en verdi som forteller hvor bra en konsument har det for gitte godekombinasjoner.

- $x_1 = 1, x_2 = 1$: $U(1,1) = \sqrt{1}\sqrt{1} = 1$
- $x_1 = 1, x_2 = 2$: $U(1,2) = \sqrt{1}\sqrt{2} = \sqrt{2} \approx 1.41$
- $x_1 = 4, x_2 = 1$: $U(4,1) = \sqrt{4}\sqrt{1} = 2$
- $x_1 = 4, x_2 = 4$: $U(4,4) = \sqrt{4}\sqrt{4} = 4$

2 Fra nyttefunksjonen til indifferenskurve

Vi kan finne en indifferenskurven ved å holde nytten til konsumenten konstant. Vi holder oss til talleksemplet med nyttefunksjonen $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$. Vi definerer $\bar{U}$ som en konstant nytte.

Vi bestemmer at nytten skal være konstant:

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2} = \bar{U}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_2} = \frac{\bar{U}}{\sqrt{x_1}}$$

$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{\bar{U}^2}{x_1}$$

Funksjonen $x_2 = \frac{\bar{U}^2}{x_1}$ er indifferenskurven til nytten $\bar{U}$. En indifferenskurve er nøyaktig det samme som en *nivåkurve* i matematikk.

For å finne en bestemt indifferenskurve setter vi en verdi på $\bar{U}$. Vi kan f.eks. finne alle godekombinasjoner som gir nytte lik 1 ved å sette $\bar{U} = 1$:

$$\bar{U} = 1$$
$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{x_1}$$

Ved å sette inn verdier for x_1 kan vi nå finne uendelig mange godekombinasjoner som gir nytte eksakt lik 1: $(x_1 = 1/2, x_2 = 2)$, $(x_1 = 1, x_2 = 1)$, $(x_1 = 2, x_2 = 1/2)$ er alle godekombinasjoner som gir nytte eksakt likt 1. Alle disse godekombinasjonene må dermed være på samme indifferenskurve! Konsumenten er *likegyldig* mellom alle disse godekombinasjonene.

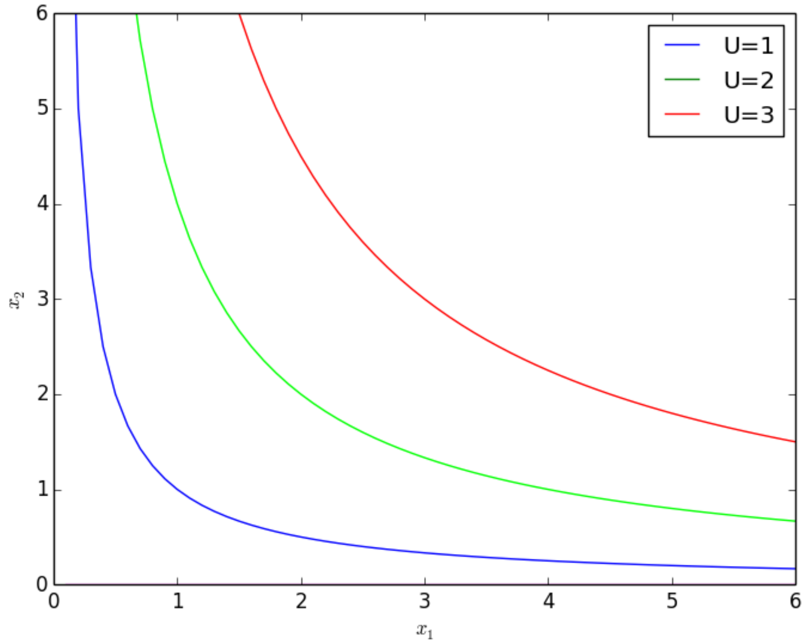
Vi kan finne en høyere indifferenskurve ved å sette nytten til en høyere verdi. Hvis vi bestemmer at nytten skal være lik 2, får vi følgende indifferenskurve:

$$\bar{U} = 2$$
$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{2^2}{x_1}$$
$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{4}{x_1}$$

Igjen kan vi potensielt finne uendelig mange verdier som gir nytte eksakt lik 2: $(x_1 = 1/4, x_2 = 16), (x_1 = 1, x_2 = 4), (x_1 = 2, x_2 = 2), (x_1 = 3, x_2 = 4/3)$.

Merk også hvordan den marginale substitusjonsbrøk forandrer seg. Konsumenten er villig til å gi opp to enheter av vare 2 for å øke konsumet av vare 1 fra en enhet til to enheter. Men konsumenten er bare villig til å gi opp 2/3 enheter av vare 2 for å øke konsumet av vare 1 fra to enheter til tre enheter. Med andre ord: Konsumentens *marginale betalingsvillighet* for vare 1 blir lavere jo mer man har av vare 1 fra før.

Figur 2 viser tre indifferenskurver med konstant nytte lik henholdsvis 1, 2 og 3. Et høyere nyttenivå innebærer en høyere indifferenskurve. Jo høyere nytte en konsument har, jo bedre er det for konsumenten. Dette innebærer at konsumenten vil ønske å være på en så høy indifferenskurve som mulig da dette betyr høyere nytte.



Figur 2: Indifferenskurver for nytte lik 1,2 og 3 og $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$

3 Nyttemaksimering

En konsument ønsker å ha en så høy nytte som mulig. Det vil si, man ønsker å komme på en så høy indifferenskurve som mulig. Konsumentens *konsummulighetsområde* er begrenset av konsumentens inntekt og priser på konsumgodene. La oss anta at konsumenten har 8 kr som han skal bruke på konsum. Pris på vare 1 er 4 kr, og pris på vare 2 er 1 kr. Budsjettet blir dermed som følger:

$$8 = 4x_1 + 1x_2$$

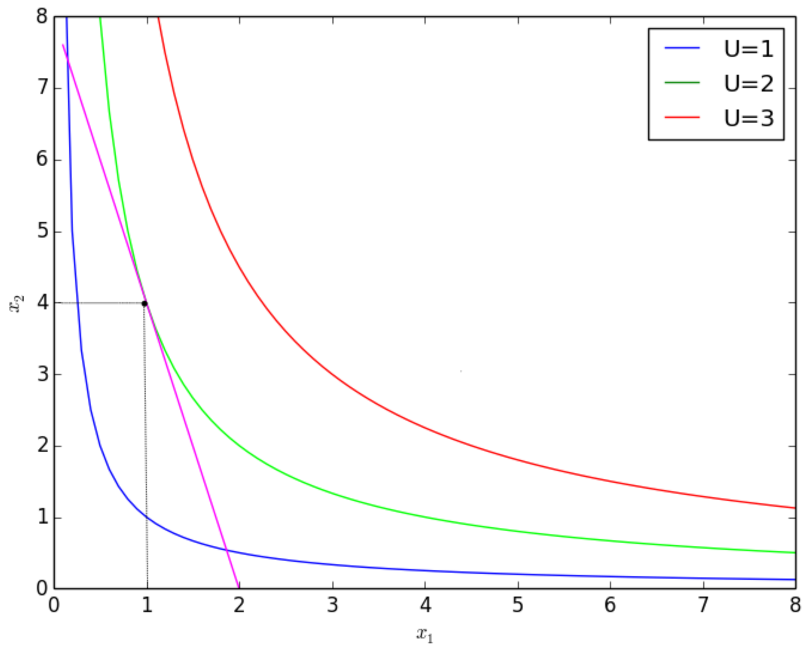
Vi kan løse for x_2 og finne hvor mye av vare 2 konsumenten kan kjøpe gitt et konsum av vare 1:

$$x_2 = 8 - 4x_1$$

Hvis man eksempelvis kjøper én enhet av vare 1 kan man maksimalt kjøpe fire enheter av vare 2 ($x_2 = 8 - 4 \cdot 1 = 4$). Kjøper man to enheter av vare 1 kan man ikke kjøpe noe av vare 2 i det hele tatt ($x_2 = 8 - 4 \cdot 2 = 0$).

Hvor mye skal konsumenten kjøpe av vare 1 og hvor mye skal man kjøpe av vare 2? Budsjettet og indifferenskurven vil sammen gi løsningen. Konsumenten ønsker å få en så høy nytte som overhode mulig gitt det budsjettet man har. Den høyeste nytten man kan nå er gitt ved det punktet der en indifferenskurve *tangerer* budsjettlinja.

Figur 3 viser at med nyttefunksjonen $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$ er godekombinasjon $x_1 = 1$ og $x_2 = 4$ det beste denne konsumenten kan få til. Alle andre godekombinasjoner som er tillatt innenfor budsjettet vil føre til en lavere nytte for konsumenten. Konsumentens *nyttemaksimum* er derfor $U(1, 4) = \sqrt{1}\sqrt{4} = 1 \cdot 2 = 2$.

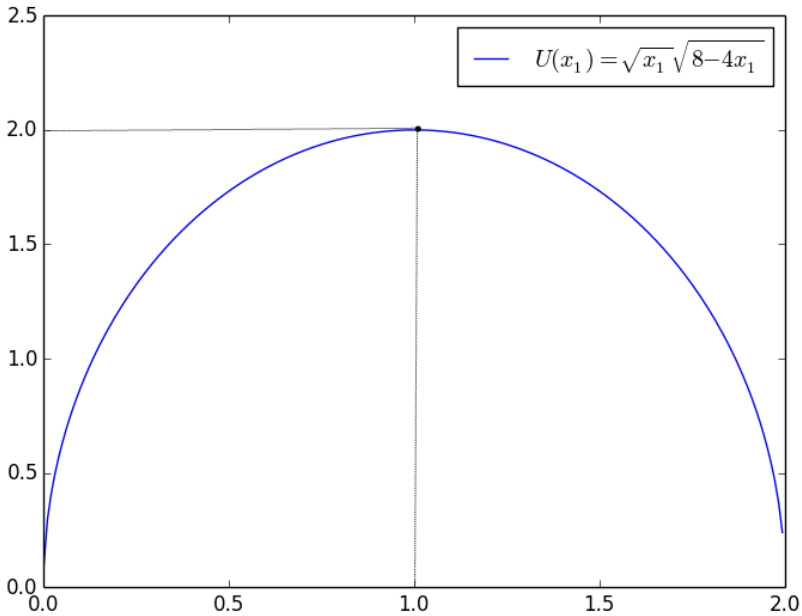


Figur 3: Med nyttefunksjon $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$, inntekt 8 kr, $p_1 = 4$ kr, $p_2 = 1$ kr, får konsumenten nytte lik 2 ved godekombinasjon $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Dette er den høyeste nytten man kan nå gitt budsjettet.

For å bekrefte at $x_1 = 1$ og $x_2 = 4$ faktisk er *nyttemaksimum* gitt konsumentens preferanser, disponibel inntekt og pris på goder, kan vi illustrere nyttefunksjonen med restriksjonen at hele budsjettet blir brukt. Vi har nyttefunksjonen $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$ og vi har budsjettbetingelsen $x_2 = 8 - 4x_1$. Vi kan sette budsjettbetingelsen inn i nyttefunksjonen slik at dette blir en funksjon bare av x_1:

$$U(x_1, x_2) = U(x_1, 8 - 4x_1) = \sqrt{x_1}\sqrt{8 - 4x_1}$$

Nyttefunksjonen med restriksjonen at hele budsjettet skal bli brukt opp er illustrert i figur 4. Vi ser fra figuren at *nyttemaksimum* i dette tilfellet er oppnådd ved at man forbruker én enhet av vare 1: $x_1^* = 1$. Dette gir en nytte lik 2, altså nøyaktig samme verdi som indifferenskurven som tangerer budsjettlinja i figur 3.



Figur 4: Nyttefunksjon $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$ med restriksjon på x_2 at hele budsjettet blir brukt: $x_2 = 8 - 4x_1$.

Nå som vi vet at $x_1^* = 1$ gir nyttemaksimum gitt nyttefunksjonen og budsjettbetingelsen, kan vi sette inn x_1^* i budsjettbetingelsen for å finne konsumet av x_2 som maksimerer nytte:

$$x_2^* = 8 - 4x_1^* = 8 - 4 \cdot 1 = 4$$

Igjen har vi nøyaktig samme resultat som ved tangeringsbetingelsen av indifferenskurven på budsjettlinja. Vi har dermed at nyttemaksimum med nyttefunksjon $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$ og budsjettbetingelsen $4x_1 + 1x_2 = 8$ er gitt ved $x_1^* = 1$ og $x_2^* = 4$, noe som gir maksimal mulig nytte lik $U(1, 4) = \sqrt{1}\sqrt{4} = 2$.

4 Det generelle resultatet

Nyttemaksimum er gitt ved to betingelser:

1. Hele budsjettet skal brukes: $p_1x_1 + p_2x_2 = m$
2. Helningen på indifferenskurven (MRS) skal være lik helningen på budsjettlinja $(-p_1/p_2)$

Disse to betingelsene innebærer at nyttemaksimum er gitt ved at konsumenten tilpasser seg der en indifferenskurve tangerer budsjettlinja. Dette er den *høyeste nytten* som er mulig.

5 Etterspørselkurve (for spesielt interesserte)

Det kan vises at med nyttefunksjonen $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$ er helningen på indifferenskurvene gitt ved $MRS = -x_2/x_1$ (*utledet ved derivasjon, ikke forventet at dere skal utlede helningen på indifferenskurven i dette kurset*).

Vi har to betingelser som gir nyttemaksimering.

1. Hele budsjettet skal brukes:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

2. Helningen på indifferenskurven er lik helningen på budsjettlinja:

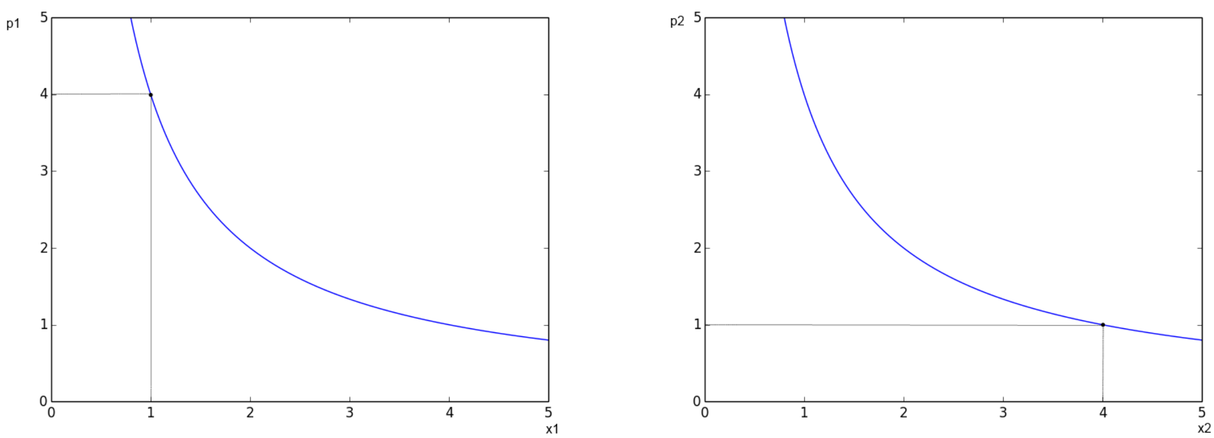
$$\frac{-x_2}{x_1} = \frac{-p_1}{p_2}$$

Vi har dermed to ligninger med to ukjente (x_1 og x_2). Ved å løse ligningsettet får vi:

$$x_1 = \frac{m}{2p_1}$$

$$x_2 = \frac{m}{2p_2}$$

Ved å sette inn $m = 8, p_1 = 4, p_2 = 1$ ser du at vi får samme resultat som i de tidligere regneeksemplene. Uttrykkene over er faktisk *etterspørselkurvene* etter vare 1 og vare 2 for konsumenten. En endring i inntekt m vil føre til positivt skift i etterspørselkurvene, altså er begge varer *normale goder*. Ved endring i priser beveger vi oss langs etterspørselkurvene. Vare 1 og vare 2 er verken substitutter eller komplementære goder siden prisen på vare 2 ikke inngår i etterspørselen etter vare 1, og omvendt. Etterspørselkurvene er illustrert i figur 5.



Figur 5: Etterspørselkurver for vare 1 og vare 2 med $m = 8$. For $p_1 = 4$ og $p_2 = 1$, får vi samme etterspørsel etter varene som fra konsumentens optimale tilpasning.

Konklusjonen er dermed at en individuell etterspørselkurve er utledet fra konsumentens nyttemaksimering!