Nåverdi og pengenes tidsverdi

Arne Rogde Gramstad
Universitetet i Oslo

18. oktober 2015

Versjon 2.0
Ta kontakt hvis du finner uklarheter eller feil:
a.r.gramstad@econ.uio.no

1 Innledning

Anta at du har valget mellom å motta (i) 100 kr nå eller (ii) 100 kr om ett år. Du ville antakelig velge å ta pengene nå. Hvorfor? Selv om du ikke nødvendigvis planlegger å bruke pengene umiddelbart, kan du sette de 100 kronene i banken slik at du sitter igjen med 100 kr *og* renteinntekter om ett år. Altså kan du potensielt ha mer penger å handle for om ett år hvis du velger alternativ (i) framfor alternativ (ii).

Dette innebærer at verdien av en krone reduseres over tid, målt i dagens kroneverdi. På grunn av muligheten for framtidig avkastning av penger nå, vil man typisk ha høyere betalingsvillighet for 100 kr i dag versus 100 kr en gang i framtiden. Pengenes tidsverdi er av stor betydning for verdsetting. F.eks. hvor mye bør en entrepenør maksimalt være villig til å investere i et prosjekt som gir 1 million kroner om ti år – og hvor mye er en aksjeandel som gir 1000 kr i årlig utbytte verd i dag?

2 Sammenheng mellom framtidsverdi og nåverdi

2.1 Det enkleste tilfellet

Anta at du setter 100 kr i banken i dag. Hvor mye penger har du da om ett år? Det du sitter igjen med er det du satte inn, 100 kr (prinsipalen), samt renteinntektene av disse 100 kr, $100 \cdot r$.[1]

$$100 + 100r = 100(1 + r)$$

Hvis renta f.eks. er på 5%, sitter du igjen med $100(1 + 0.05) = 105$ kr. Dermed er 105 kr om ett år like mye verd som 100 kr i dag. Vi har nå funnet at *framtidsverdien* av 100 kr i dag er 105 kr.

Formelt kan vi si at framtidsverdien, FV ("Future Value"), av D kr om ett år er D kroner pluss renteinntekter.

$$FV = D(1 + r)$$

Men hva er verdien av 100 kr i framtiden *målt i dag*? Det er dette som er *nåverdien*. Verdien vi er på jakt etter er det beløpet du må sette i banken i dag som fører til at du har 100 kr til rådighet om ett år. Vi kaller dette beløpet foreløpig PV ("Present Value") og setter inn i ligningen:

$$PV(1 + r) = 100$$

Vi løser ligningen ved å dele på $(1 + r)$ på begge sider av likhetstegnet å finner nåverdien av 100 kr om ett år:

$$PV = \frac{100}{1 + r}$$

Hvis renta er på 5% kommer vi frem til at *nåverdien* av 100 kr om ett år er $100/(1 + 0.05) \approx 95{,}24$ kr.

Formelt skriver vi nåverdien av D kr om ett år som:

$$PV = \frac{D}{1 + r}.$$

95,24 kr er dermed det du maksimalt bør være villig til å betale for en inntekt på 100 kr om ett år når renta er 5 %.

[1] r måles i prosent (hundredeler). Hvis renta er 5 %, er $r = 5 \cdot 1/100 = 0.05$

2.2 Nåverdi av en kontantstrøm lenger fram i tid

La oss heller anta at du mottar 100 kr om $T > 1$ år fram i tid. Siden renter normalt måles årlig, må vi ta med renters-rente effekt i beregningen. Hvis du setter 100 kr i banken i dag vil du om tre år sitte igjen med

$$FV = 100(1 + r)(1 + r)(1 + r) = 100(1 + r)^3$$

kroner. Dette er framtidsverdien av 100 kr om tre år. Altså, hva 100 kr i dag vil være verd for deg om tre år. Med 5% rente innebærer dette du har ca 115,76 kr. Naturligvis har du mer å rutte med hvis du sparer i tre år enn ett år. Dette innebærer at nåverdien av 115,76 kr om 3 år er 100 kr.

Hva er så nåverdien av å motta 100 kr om T år? Det vil si, hvor mye må du sette i banken i dag for å ha nøyaktig 100 kr om T år. På samme måte som tidligere finner vi at nåverdien av D kr om T år er:

$$PV = \frac{100}{(1 + r)^T}.$$

Ved hjelp av denne ligningen, kommer vi frem til at med $D = 100$ ved 5% rente er nåverdien av 100 kr mottatt 3 år i framtiden 86,38 kr.

Brøken $\frac{1}{(1+r)^T}$ kalles *diskonteringsfaktoren*, og tilsvarer nåverdien av 1 kr mottatt om T år.

Tabell 1 viser sammenhengen mellom nåverdi, tid og rente. Vi kan f.eks. se at ved 15% rente er nåverdien av 100 kr mottatt om 30 år kun 1 kr og 51 øre!

Eksempel: Obligasjoner

En obligasjon er et verdipapir med et løfte om en utbetaling av en gitt pengesum på et gitt framtidig tidspunkt (eller flere utbetalinger over tid, men la oss holde oss til det enkleste eksemplet). Disse utstedes både av suverene stater (statsobligasjoner) og private bedrifter (selskapsobligasjoner), og er derfor en måte for stater og bedrifter å låne penger i markedet utenom banksystemet. Hvor mye vil du maksimalt være villig til å betale for en norsk statsobligasjon som lover en utbetaling av 1000 kr om 5 år? Svaret er naturligvis *nåverdien* av 1000 kr om 5 år eller $1000/(1 + r)^5$. Merk at det er en negativ sammenheng mellom renta og nåverdien, og derfor også

År	Rente				
	1%	3%	5%	10%	15%
1	99,01	97,09	95,24	90,91	86,96
5	95,15	86,26	78,35	62,09	49,72
10	90,53	74,41	61,39	38,55	24,72
15	86,13	64,19	48,10	23,94	12,29
20	81,95	55,37	37,69	14,86	6,11
30	74,19	41,20	23,14	5,73	1,51

Tabell 1: Nåverdi av 100 kr mottatt for forskjellige år i framtiden og forskjellige rentesatser.

en negativ sammenheng mellom renta og prisen på en obligasjon. Jo lavere renta er, jo høyere er nåverdien. Dvs. jo lavere renta er, jo dyrere blir en obligasjon – og jo høyere renta er, jo billigere blir en obligasjon.

Det er naturligvis også andre faktorer som har betydning for prisen på en obligasjon, spesielt sannsynligheten for at den lovte utbetalingen faktisk vil forekomme i framtiden. Dette er hovedårsaken til at f.eks. greske statsobligasjoner (høy risiko) er billigere enn tyske (lav risiko), selv om begge disse verdipapirene verdsettes i samme valuta (euro) og neddiskonteres med samme rentesats.

Ved obligasjoner som utbetales flere år fram i tid, vil også forventninger om framtidig rentenivå virke inn på prisen på markedsprisen en obligasjon.

3 Nåverdi av gjentatte kontantstrømmer

Anta nå at mottar D kr hvert år flere år inn i framtiden (om ett år, om to år, osv.). For å finne nåverdien av en slik kontantstrøm må vil legge sammen nåverdien av D kr om ett år, to år, ..., T år:

$$PV = \frac{D}{1+r} + \frac{D}{(1+r)^2} + \frac{D}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{D}{(1+r)^T}$$

Dette er naturligvis tidkrevende (og kjedelig) å regne på uten regneark (f.eks. Excel). Det viser deg imidlertid at dette regnestykket blir enklere hvis vi lar T gå mot uendelig, det vil si at mottar D kr hvert år *uendelig* mange år fram i tid. Siden verken vi, bedrifter eller verdipapirer lever uendelig lenge, kan dette virke som en fjern tenkemåte, men for tilstrekkelig høye rentesatser blir dette en god tilnærming til pengestrømmer mottatt over tilstrekkelig mange år. Formelen for nåverdien er en såkalt geometrisk rekke som fortsetter for alltid er:[2]

$$PV = \frac{D}{1+r} + \frac{D}{(1+r)^2} + \frac{D}{(1+r)^3} + \cdots + (\text{uendelig mange ganger}) = \frac{D}{r}$$

Årsaken til at regnestykket faktisk blir enklere med en uendelig lang tidshorisont er at brøken $D/(1+r)^t$ blir veldig liten når t er stor nok. Med "tilstrekkelig" stor t begynner vi å summere med verdier som veldig nære 0. Regneeksempler med nåverdien av 100 kr mottatt hvert år 100 år frem i tid kan du finne her:
`https://docs.google.com/spreadsheets/d/1fmQZTgZGFI7aqTCS-0d0zARnCCdg8HNGZa7l81UZdO8/edit?usp=sharing`

Med 5% rente blir regnefeilen bare 15 kr. For 10% og 15% rente er regnefeilen så liten at den ikke har noen praktisk betydning.

Eksempel: Aksjer

Hvorfor har aksjer verdi? En aksjonær i et selskap er deleier og har derfor krav på *utbytte*. Det vil si en del av overskuddet til bedriften blir utbetalt til aksjonærene. Anta at du skal kjøpe en andel (la oss si 200 aksjer) i Statoil, at du forventer å få 1000 kr årlig i aksjeutbytte i all overskuelig framtid ("uendelig" lenge). Hva bør du maksimalt være villig til å betale for denne aksjeandelen?

Svaret er igjen *nåverdien* av å motta 1000 kr hvert år: $1000/r$. Hvis renta eksempelvis er 5% er nåverdien av disse Statoil-aksjene $1000/0.05 = 1000 \cdot 20 = 20000$ kr.

Hvis prisen var *mer* enn 20 000 kr, burde du heller sette 20 000 kr i banken. Hvis prisen var lavere enn 20 000 bør Statoil-aksjer være en lur investering siden dette gir høyere forventet avkastning enn banksparing. I et velfungerende marked bør derfor prisen på en aksje tilsvare nåverdien av forventet framtidig utbytte. Hvis markedsprisen var *høyere*, vil aksjonærer

[2] Se f.eks. `http://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_series#Economics`

ønske å selge aksjene og heller sette pengene i banken (høyere forventet avkastning i banken), og dermed føre til et negativt prispress. Skulle markedsprisen være *lavere* vil investorer by opp prisen så lenge forventet avkastning i aksjer er høyere enn det man får i banken (positivt prispress).

Selv om vi her antar at du mottar 1000 kr *uendelig* mange ganger, er ikke verdien av denne pengestrømmen uendelig stor. Siden verdien *i dag* av 1000 kr blir mindre og mindre jo lenger du må vente på å motta utbytte da hver utbetaling neddiskonteres med $1/(1+r)^T$ der T er antall år i framtiden beløpet mottas.

Hva kan disse enkle utregningene si om aksjekurser? Akkurat som obligasjoner vil vi forvente enn negativ sammenheng mellom renta og aksjemarkedet. Jo høyere renta er, jo lavere er nåverdien av framtidig utbytte, som innebærer at vi vil forvente en lavere pris på aksjer. I tillegg vil naturligvis forventet årlig utbytte har en stor betydning for aksjekursen. Hvis årlig utbytte øker med 1 kr, vil nåverdien av aksjen øke med $1/r$ kroner.

Eksemplet med aksjer er naturligvis svært forenklet, og aksjepriser svinger mye mer enn det argumentet over skulle tilsi. Som med obligasjoner vil det være usikkerhet på fremtidig rentenivå, og det er også stor usikkerhet på størrelsen på utbytte i framtiden. Selv du mottok 1000 kr i utbytte i fjor, er det ikke sikkert at utbyttet vil være det samme i årene som kommer. Forventninger om fremtiden vil typisk ha en stor betydning for markedsprisen for aksjer og andre verdipapirer der det er stor usikkerhet om framtidig avkastning.

4 Nåverdi av en investering

Investeringer innebærer vanligvis utgifter i dag og inntekter i framtiden. For å evaluere hvorvidt en investering forventes å være lønnsom må man regne om fremtidige inntekter til dagens verdi. *Netto-nåverdien* (NPV – "Net Present Value") av en investering er altså kostnaden ved dagens investering I (negativ) pluss summen av alle nåverdien av fremtidige inntekter (antatt D_t årlig):

$$NPV = -I + \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{D_T}{(1+r)^T}$$

For å ta et konkret eksempel. Anta at det koster 2 millioner for en byggherre å bygge et hus. Konstruksjonen tar tre år, og det er forventet at huset blir solgt for 3 millioner. Hva er nåverdien av investeringen?

$$NPV = -2000000 + \frac{3000000}{(1+r)^3}$$

Hva er betingelsen for at investeringen er lønnsom? Byggherren må minst forvente en positiv NPV.

$$\begin{aligned} NPV &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -2000000 + \frac{3000000}{(1+r)^3} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (1+r)^3 &\leq \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow (1+r) &\leq (\frac{3}{2})^{\frac{1}{3}} \\ \Leftrightarrow r &\leq 0.1447 = 14.47\% \end{aligned}$$

Altså, så lenge renta er lavere enn 14.47% er dette et lønnsomt prosjekt. Merk at man vil komme fram til samme konklusjon uavhengig av om man investerer med egne midler eller lånte penger. Investerer man med egne midler kan renta sees på som en *alternativkostnad*: Det man kunne fått om man satte pengene i banken i stedet.

Låner man penger, må man betale tilbake lånebeløpet pluss rentekostnaden, som i det konkrete tilfellet over ville vært $2000000(1+r)^3$. Altså ville prosjektet kun være lønnsomt om inntektene var større enn lånekostnadene: $3000000 > 2000000(1+r)^3$, som er nøyaktig samme regnestykke som eksemplet over.

5 Litt om inflasjon

Fram til nå har vi ignorert inflasjon, men vi skal se at vi egentlig har tatt inflasjon implisitt med i beregningen. Penger har en verdi på grunn av kjøpekraften de gir oss, og hvis kjøpekraften per krone reduseres over tid, må vi også kontrollere for dette i nåverdi-beregningene.

Det forbrukere og bedrifter bør bry seg om er ikke hvor mye penger de har nå og i framtiden, men hvor mye konsum en gitt mengde penger gir.

Det kan derfor være enklere å tenke på kjøpekraft i stedet for antall kroner hvis priser endres over tid. Vi må også skille mellom *nominelle renter*, i og *realrenter*, r.

Anta at én potet koster 1 kr i dag, og at potetprisen om ett år er $1+\pi$ kr, der π er inflasjonen (f.eks. ved 2 % prisstigning er $\pi = 0.02$ som gir en potetpris på 1 kr og 2 øre om ett år). Det innebærer at 100 kr *i dag* gir oss $100/(1+\pi)$ poteter om et år.

Fremtidsverdien (FV) av å spare 100 kr i dag med en *nominell rente* på i %, ***målt i poteter (!)***, er:

$$FV = \frac{100}{1+\pi}(1+i)$$

Hvis den nominelle renta er større enn inflasjonen får du dermed flere poteter i framtiden, og hvis inflasjonen er større enn den nominelle renta vil du få *færre* poteter om ett år enn i dag ved å spare 100 kr.

Generelt, antall poteter (ev. kjøpekraftsjusterte kroner) du får om ett år ved å spare D kroner er:

$$FV = \frac{D}{1+\pi}(1+i)$$

Men det er *nåverdien* vi er på jakt etter. Hva er verdien *i dag* for 100 poteter i framtiden. Eventuelt, hva bør du maksimalt være villig til å betale i dag for å få 100 poteter i framtiden? Vi setter $FV = 100$, og regner ut nåverdien PV:

$$100 = \frac{PV}{1+\pi}(1+i)$$
$$\Leftrightarrow PV = \frac{100}{1+i}(1+\pi)$$

Generelt, nåverdien ved å motta D poteter (eller D kjøpekraftsjusterte kroner) om ett år er:

$$PV = \frac{D}{1+i}(1+\pi)$$

Realrente og nominell rente

Realrenta, r, er avkastningen vi får ved å spare når vi også kontrollerer for reduksjon i kjøpekraft gjennom inflasjon.

Endringen du får i kjøpekraft (f.eks. i antall poteter) ved å spare 1 kr i dag er da om ett år:

$$1 + r = \frac{1+i}{1+\pi}$$

Vi kan løse denne for den nominelle renta, i som en funksjon av realrenta og inflasjonen.

$$1 + i = (1 + r)(1 + \pi) = 1 + r + \pi + r\pi$$

Fordi vi typisk har at både realrenta og inflasjonen er forholdsvis små tall, slik at $r\pi \approx 0$, kan ligningen over tilnærmes:

$$1 + i \approx 1 + r + \pi$$

Vi kan løse denne for realrenta, $1 + r$:

$$1 + r \approx 1 + i - \pi$$

Med mindre vi er i en situasjon med veldig høye nominelle renter eller veldig høy inflasjon, kan vi i stedet skrive nåverdien av en inntekt (eller kostnad) på D kjøpekraftsjusterte kroner ett år fram i tid som følger, uten å gjøre en veldig stor regnefeil:

$$PV = \frac{D}{1+r} \approx \frac{D}{1+i-\pi}$$

Vi har dermed i dette notatet implisitt korrigert for inflasjon ved å anta at framtidige inntekter og kostnader er kjøpekraftsjusterte. Hvis vi ønsker å regne ut nåverdier med nominelle renter medregnet inflasjon, kan vi derfor erstatte r med $i - \pi$ i eksemplene i avsnittene 1-4.

6 Konsumentens intertemporale budsjettbetingelse

På samme måte som en konsument har en budsjettbetingelse mellom to varer, kan man konstruere en budsjettbetingelse for konsum mellom to perioder. Det vil si at vi betrakter konsum på to forskjellige tidspunkt som to forskjellige varer.

Anta at en konsument har en inntekt i år (år 1) lik m_1 og en inntekt neste år (år 2) lik m_2. Konsumet i år 1 og år 2 kan betegnes c_1 og c_2. Renta ved å spare/låne er r.

Budsjettbetingelsen kan skrives som en funksjon av konsum i år 2:

$$c_2 = m_2 + (m_1 - c_1)(1 + r)$$

Tolkningen av denne budsjettbetingelsen avhenger av fortegnet av $m_1 - c_1$, hvorvidt konsumenten låner eller sparer i år 1.

Hvis $m_1 > c_1$. Konsumenten sparer: Konsumet i år 2 er lik inntekten i periode 2 pluss sparing fra periode 1 inkludert renter

Hvis $m_1 < c_1$. Konsumenten låner: Konsumet i år 2 er lik inntekten i periode 2 minus tilbakebetalt lånebeløp inkludert renter.

Dermed er det usikkert hvorvidt en renteøkning vil øke eller redusere konsumentens konsummulighetsområde da dette avhenger av om man sparer eller låner. Dette er illustrert i Figur 1 (siste side): Når $c_1 < m_1$, vil en renteøkning fra r_L til r_H (L for "lav", H for "høy") føre til at konsumenten har mer penger som kan brukes til konsum i år 2 – og omvendt hvis $c_1 > m_1$, da man i det nå vil ha økte renteutgifter i år 2 for et gitt lånebeløp.

Budsjettbetingelsen mellom konsum av to varer, x_1 og x_2 med priser p_1 og p_2, samt inntekt/budsjett m skrives gjerne som:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

Altså, utgifter til vare 1 og utgifter til vare 2 tilsvarer inntekten. Budsjettbetingelsen for konsumet mellom to perioder kan skrives på samme måte:

$$c_1 + \frac{1}{1 + r} c_2 = m_1 + \frac{1}{1 + r} m_2$$

Budsjettbetingelsen over står i nåverdi-form, der "priser" måles relativt til hva 1 krone er verd i år 1. "Prisen" på 1 kr konsum i dag er 1 kr, og "prisen" på 1 kr konsum om ett år er $\frac{1}{1+r}$. Framtidig inntekt, m_2, er også neddiskontert med faktoren $\frac{1}{1+r}$. Framtidig konsum er altså "billigere" enn dagens konsum. Intuisjonen er som følger: For hver krone du bruker i dag, gir du opp $1+r$ kroner konsum om ett år. Derfor er konsum i dag "dyrere" en konsum neste år, eventuelt, konsum neste år er "billigere" enn konsum i dag.

7 Definisjoner

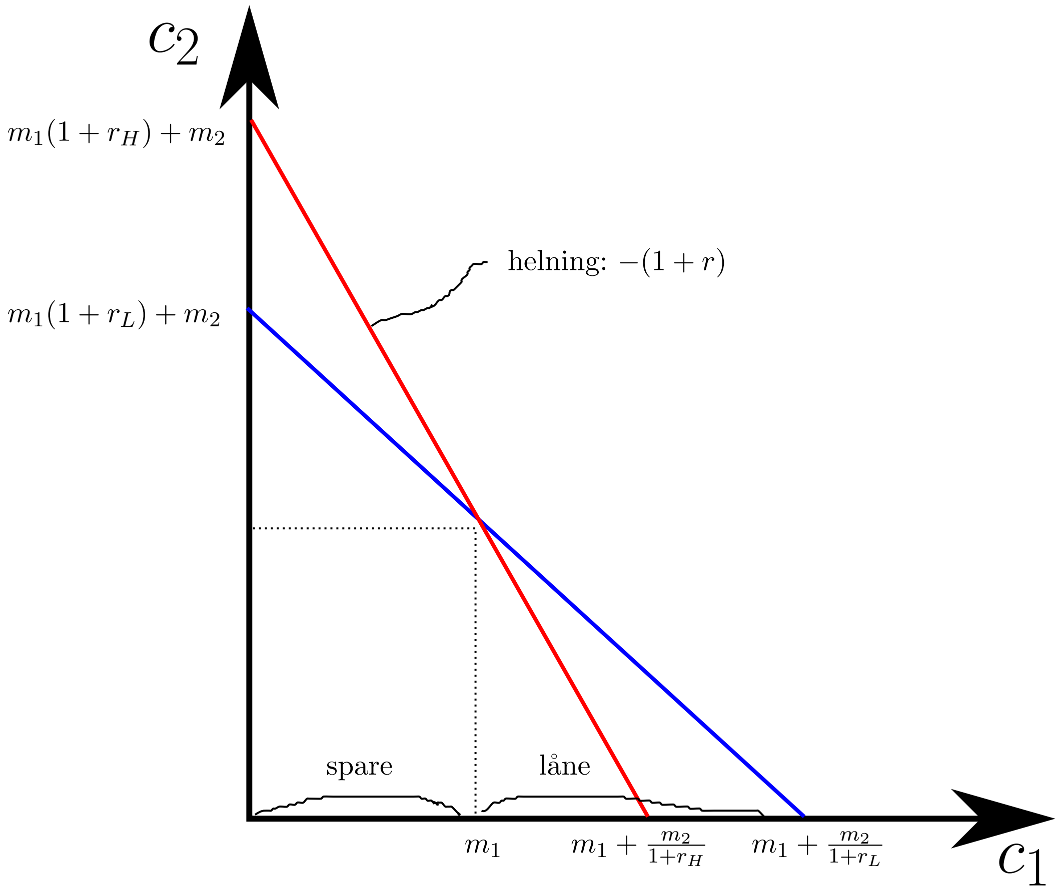
- Nåverdi (PV - "Present Value"): Fremtidige inntekter/kostnader omregnet til dagens verdi.
  - Nåverdien av D kr om T år til en rente r, er:

$$PV = \frac{D}{(1+r)^T}$$

- Netto-nåverdi (NPV - "Net Present Value"): Nåverdi av alle utgifter og inntekter.
  - Netto-nåverdien av en investering som gir en kostnad på I kr i dag og en inntekt på D kr om T år til rente r, er:

$$NPV = -I + \frac{D}{(1+r)^T}$$

- Diskonteringsfaktor: Nåverdi av 1 kr mottatt om T år: $\dfrac{1}{(1+r)^T}$



Figur 1: Intertemporal budsjettbetingelse med høy og lav rente. $r_H > r_L$