Steinar Holden, januar 2013

Løsningsforslag til oppgave-sett Keynes-modeller

Oppgave 1
Betrakt modellen:

(1) $Y = C + I$
(2) $C = c_0 + c Y$ $\quad c_0 > 0, 0 < c < 1$

der Y er BNP, C er konsum, og I er realinvesteringer. Y og C er de endogene variable, og I er eksogen.

a) La $c_0 = 100$, $c = 0{,}8$ og $I = 100$. Finn likevektløsningene for Y og C.
b) Anta at investeringene øker til $I_1 = 120$. Finn likevektsløsningene for Y og C.

Løsningsforslag oppgave 1:
En måte å løse oppgave på, er å først sette inn tall for de eksogene variable og parametre, slik at vi får

(1') $Y = C + 100$
(2') $C = 100 + 0{,}8\ Y$

og deretter løse modellen for Y og C
Vi finner først løsningen for Y. Da må vi få et uttrykk for Y alene, og må derfor "bli kvitt" den andre endogene variabelen C. Vi "blir kvitt" C i (1') ved å erstatte den med uttrykket for C fra (2'). Med andre ord, vi setter (2') inn i (1'), bruker at I = 100, og får

$Y = 100 + 0{,}8\ Y + 100.$

Trekker fra 0,8 Y på begge sider, slik at vi får

$Y - 0{,}8\ Y = 100 + 100$

Regner ut uttrykkene på begge sider

$0{,}2\ Y = 200$

Deler på 0,2 på begge sider

$$\frac{0{,}2Y}{0{,}2} = \frac{200}{0{,}2} = 1000$$

Kan forkorte 0,2 mot 0,2 på venstresiden, slik at løsningen for Y blir

$Y = 1000.$

Løsningen for C finnes ved å sette løsningen for Y inn i (2')

C = 100 + 0,8*1000 = 900

Alternativt kunne vi løst oppgaven ved å først finne løsningene for Y og C analytisk, og deretter sette inn tall for parametere og eksogene variable.
Ved å sette inn for C i (1) ved å bruke (2), får vi

$Y = c_0 + cY + I$

Her kan vi trekke fra Y på begge sider, slik at vi får

$Y - cY = c_0 + I$

Vi kan sette Y utenfor en parentes på venstresiden

$Y(1-c) = c_0 + I$

og dele på uttrykket i parentesen på begge sider av likhetstegnet

(3) $$Y = \frac{1}{1-c}(c_0 + I)$$

som er løsningen for Y. Løsningen for Y, (3), kan settes inn i konsumfunksjonen (2), slik at vi får

(4)
$$\begin{aligned}
C = c_0 + cY &= c_0 + \frac{c}{1-c}(c_0 + I) \\
&= c_0 + \frac{c}{1-c}c_0 + \frac{c}{1-c}I \\
&= \left(1 + \frac{c}{1-c}\right)c_0 + \frac{c}{1-c}I \\
&= \left(\frac{1-c}{1-c} + \frac{c}{1-c}\right)c_0 + \frac{c}{1-c}I \\
&= \frac{1-c+c}{1-c}c_0 + \frac{c}{1-c}I \\
&= \frac{1}{1-c}c_0 + \frac{c}{1-c}I
\end{aligned}$$

som er løsningen for C. Nå kan vi sette inn tall for I, c_0 og c i (3) og (4), og vi får de samme løsninger som vi har fått over. (3) og (4) kaller vi modellen på redusert form.

b) Løsningene for Y og C når I har økt til 120 kan vi finne på samme måte som under a). Når vi allerede har funnet løsningene for Y og C, er det enklest å sette inn tall direkte der. Da får vi

$$Y = \frac{1}{1-0,8}(100+120) = 5*220 = 1100$$

$$C = \frac{1}{1-0,8}100 + \frac{0,8}{1-0,8}120 = 5*100 + 4*120 = 980$$

Oppgave 2

Betrakt modellen:

(1) Y = C + I

(2) C = 200 + 0,8 Y

der Y er BNP, C er konsum, og I er realinvesteringer. Y og C er de endogene variable, mens investeringene I = 100.

a) Finn likevektsløsningene for Y, C og sparingen S = Y – C.
b) Anta at konstantleddet i konsumfunksjonen reduseres til 180, dvs. at konsumfunksjonen nå blir

   C = 180 + 0,8 Y

Finn likevektsløsningene for Y, C og S. Sammenlign med svaret på a), og forklar de økonomiske mekanismene.

Løsningsforslag oppgave 2:

Vi finner først løsningen for Y.

Da må vi få et uttrykk for Y alene, og må derfor ”bli kvitt” den andre endogene variabelen C. Vi ”blir kvitt” C i (1) ved å erstatte den med uttrykket for C fra (2). Med andre ord, vi setter (2) inn i (1), bruker at I = 100, og får

Y = 200 + 0,8 Y + 100.

Trekker fra 0,8 Y på begge sider, slik at vi får

Y – 0,8 Y = 200 + 100

Regner ut uttrykkene på begge sider

0,2 Y = 300

Deler på 0,2 på begge sider

$$\frac{0,2Y}{0,2} = \frac{300}{0,2} = 300*5$$

Kan forkorte 0,2 mot 0,2 på venstresiden, slik at løsningen for Y blir

Y = 300*5 =1500.

Løsningen for C finnes ved å sette løsningen for Y inn i (2)

C = 200 + 0,8*1500 = 1400

Løsningen for sparingen S finnes ved å sette inn løsningene for Y og C i uttrykket for S:

S = Y – C = 1500 – 1400 = 100.

b) gjøres på tilsvarende måte. Vi får
Y = (180+100)/0,2 = 280*5 = 1400
C = 180 + 0,8*1400 = 1300
S = 1400 – 1300 = 100

Endringen i Y blir ΔY = 1400 – 1500 = -100. BNP reduseres. Reduksjonen i BNP er mye større enn den initiale reduksjonen i konsumet, Δc_0 = 180 – 200 = -20. Årsaken til at BNP reduseres mer enn den initiale reduksjonen i konsumet, er multiplikator-virkninger via konsumet. Den initiale reduksjonen i konsumet gir redusert BNP, som igjen fører til redusert inntekt og dermed redusert konsum. Reduksjonen i konsumet gir ytterligere reduksjon i BNP og inntekt, som igjen fører til redusert konsum. Osv.

På oppgavene 3 – 6 gis bare skisse med riktige formler

Oppgave 3
a) Likevektsløsninger for Y og C

$$Y = \frac{1}{1-c}\left(c_0 + I\right)$$

$$C = c_0 + cY = \frac{1}{1-c}c_0 + \frac{c}{1-c}I$$

b)
Y og C øker med

$$\Delta Y = \frac{1}{1-c}\Delta I > 0$$

$$\Delta C = \frac{c}{1-c}\Delta I > 0$$

Oppgave 4

a)

$$Y = \frac{1}{1-0,8}\left(50+100\right) = 5*150 = 750$$

$$C = \frac{1}{1-0,8}50 + \frac{0,8}{1-0,8}100 = 650$$

b)

$$\Delta Y = \frac{1}{1-0,8}\left(\Delta c_0 + \Delta I\right) = \frac{1}{1-0,8}\left(-20+20\right) = 0$$

$$\Delta C = \frac{1}{1-0,8}(-20) + \frac{0,8}{1-0,8}20 = -20$$

$$\Delta S = \Delta Y - \Delta C = 0-(-20) = 20$$

Oppgave 5

a og b)

Likevektsløsninger for Y og C

$$Y = \frac{1}{1-c}\left(c_0 + I\right) = \frac{1}{1-0,8}\left(10+20\right) = 150$$

$$C = c_0 + cY = \frac{1}{1-c}c_0 + \frac{c}{1-c}I = 50+80 = 130$$

c og d)

$$\Delta Y = \frac{1}{1-c}\Delta I = \frac{1}{1-0,8}2 = 10$$

$$\Delta C = \frac{c}{1-c}\Delta I = \frac{0,8}{1-0,8}2 = 8$$

e)

$$\Delta Y = \frac{1}{1-c}\Delta I = \frac{1}{1-0,5}2 = 4$$

$$\Delta C = \frac{c}{1-c}\Delta I = \frac{0,5}{1-0,5}2 = 2$$

Oppgave 6

a) Likevektsløsninger for Y og C

$$Y = \frac{1}{1-c}\left(c_0 - cT + I + G\right)$$

$$C = \frac{1}{1-c}c_0 + \frac{c}{1-c}\left(-T + I + G\right)$$

b - e)

$$\Delta Y = \frac{1}{1-c}\Delta I > 0$$
$$\Delta Y = \frac{1}{1-c}\Delta G > 0$$
$$\Delta Y = \frac{-c}{1-c}\Delta T > 0$$
$$\Delta Y = \frac{-c}{1-c}\Delta T + \frac{1}{1-c}\Delta G = \Delta G < 0$$
$$\Delta B = \Delta T - \Delta G = 0$$

(på d) er multiplikatoren mindre ved skattelette enn ved økte off kjøp, fordi noe av skatteletten blir spart)

Oppgave 7
Betrakt modellen
(1) $Y = C + I + G$
(2) $C = c_0 + c(Y\text{-}T)$
(3) $T = t_0 + tY$

der Y er BNP, C er privat konsum, I er private realinvesteringer, G er offentlig kjøp av varer og tjenester, og T er skatter minus overføringer. Y, C og T er de endogene variable. Investeringene er eksogene I = 100. Offentlige virkemidler er G = 100 og t_0 = 20 og t = 0,5. Parameterverdiene er c_0 = 50 og c = 0,8.

a) Finn likevektsløsningene for Y, C og T. Hva blir den offentlige budsjettbalansen B = T – G?
b) Anta at G øker til 120. Finn likevektsløsningene for Y, C, T og B.
c) Anta at G = 100, men at t_0 reduseres til 0. Finn likevektsløsningene for Y, C, T og B. Sammenlign med svaret under b)

Løsningsforslag oppgave 7
Vi finner først løsningen for Y.
Da må vi få et uttrykk for Y alene, og må derfor ”bli kvitt” de andre endogene variable, C og T. Vi ”blir kvitt” C og T i (1) ved å erstatte dem med uttrykket for C fra (2) og T fra (3). Med andre ord, vi setter (2) og (3) inn i (1), og får

$Y = c_0 + c(Y\text{-}(t_0 + tY)) + I + G.$
Vi løser ut parentesen på høyre-siden

$Y = c_0 + cY – ct_0 - ctY + I + G.$

Vi trekker fra cY og legger til ctY på begge sider av likhetstegnet

$Y - cY + ctY = c_0 - ct_0 + I + G$

På venstresiden settes Y utenfor en parentes

$Y(1 - c + ct) = c_0 - ct_0 + I + G$

som kan omskrives til

$Y (1 - c(1-t)) = c_0 - ct_0 + I + G$

Vi deler på uttrykket i parentesen på begge sider av likhetstegnet, slik at Y står alene på venstresiden

$$(4)\quad Y = \frac{1}{1-c(1-t)}(c_0 - ct_0 + I + G)$$

(4) er løsningen for Y. Vi setter inn de oppgitte verdier for parametre og eksogene variable, og får

$$Y = \frac{1}{1-0,8(1-0,5)}(50 - 0,8*20 + 100 + 100) = \frac{1}{1-0,4}234 = \frac{1}{0,6}234 = 390$$

Vi setter inn løsningen for Y i (2) og (3), sammen med de oppgitte parameterverdier

T = 20 + 0,5*390 =215
C = 50 + 0,8*(390-215) = 190

Kontroll: Vi kan sette inn verdier for Y, C, I og G, og sjekke at generaløkosirken Y = C + I + G stemmer: 390 = 190 + 100 + 100, og det stemmer.

Den offentlige budsjettbalansen blir

B = T – G = 215 – 100 = 115

b) G øker til 120
Vi gjør på samme måte som under a), og får

$$(5)\quad Y = \frac{1}{1-0,8(1-0,5)}(50 - 0,8*20 + 120 + 100) = \frac{1}{1-0,4}254 = \frac{1}{0,6}254 \approx 423,33$$

BNP øker dermed med $\Delta Y = 423,33 - 390 = 33,33$.

Vi setter inn løsningen for Y i (2), (3) og uttrykket for B, sammen med de oppgitte parameterverdier, og får

T = 20 + 0,5*423,33 ≈ 231,67

C = 50 + 0,8*(423,33- 231,67) ≈ 203,33
B = T – G = 231,67 – 120 = 111,67

Kontroll: Y = C + I + G => 423,33 = 203,33 + 100 + 120, som stemmer.

Merk at den offentlige budsjettbalansen svekkes, men mindre enn den initiale økningen i offentlig kjøp av varer og tjenester ΔG = 120 – 100 = 20. Vi får

ΔB = 111,67 – 115 = - 3,33

Årsaken til at B bare svekkes med 3,33 selv om G øker med 20, er at BNP øker, slik skatteinntektene T også øker.

c) G = 100, men t_0 reduseres til 0.
Vi gjør på samme måte som under b), og får

$$(6)\quad Y = \frac{1}{1-0,8(1-0,5)}(50-0,8*0+100+100) = \frac{1}{1-0,4}250 = \frac{1}{0,6}250 \approx 416,67$$

Vi setter inn løsningen for Y i (2), (3) og uttrykket for B, sammen med de oppgitte parameterverdier, og får

T = 0,5*416,67 ≈ 208,33
C = 50 + 0,8*(416,67-208,33) ≈ 216,67
Kontroll: Y = C + I + G => 416,67 = 216,67 + 100 + 100, som stemmer
B = T – G = 208,33 – 100 = 108,33

Sammenligningen av b) og c).
Begge punkter innebærer at den offentlige budsjettbalansen initialt endres med 20 (ΔG = 120-100 = 20, og Δt_0 = 20 – 0 = 20. Likevel ser vi at økningen i offentlig kjøp av varer og tjenester G fører til større økning i BNP enn dersom skattene reduseres med det samme beløpet. ΔY = 423,33 -390 = 33,33 i b), og ΔY = 416,67 – 390 = 26,67 i c).

Matematisk sett ser vi årsaken til denne forskjellen dersom vi sammenligner uttrykkene for løsning for Y, dvs (5) og (6). t_0 multipliseres med den marginale konsumtilbøylighet, parameteren c, som er mindre enn en (i vårt tilfelle lik 0,8). Dermed har en endring i t_0 mindre betydning for BNP enn det en endring i G har.

Økonomisk sett er forskjellen mellom virkning av endret offentlig kjøp, G, og endrede skatter, t_0, at skattereduksjonen fører til mindre økning i etterspørselen, fordi noe av skatteletten slår ut i økt privat sparing, mens hele økningen i G innebærer økt etterspørsel.

Oppgave 8
Betrakt modellen
(1) $Y = C + I + G$
(2) $C = c_0 + c(Y-T)$ $\qquad c_0 > 0,\ 0 < c < 1$

(3) $T = t_0 + tY$ $0 < t < 1$

der Y er BNP, C er privat konsum, I er private realinvesteringer, G er offentlig kjøp av varer og tjenester, og T er skatter minus overføringer. Y, C og T er de endogene variable. Investeringene er eksogene I = 100. Offentlige virkemidler er G, t_0 og t.

a) Finn likevektsløsningene for Y, C, T og den offentlige budsjettbalansen B = T–G.
b) Anta at G øker, dvs $\Delta G > 0$. Hvordan påvirker det likevektsløsningene for Y, C, T og B?
c) Anta at G og t_0 øker like mye, dvs $\Delta G = \Delta t_0 > 0$. Hvordan påvirker det likevektsløsningene for Y, C, T og B? Sammenlign med svaret under b).

Løsningsforslag oppgave 8:

(a)

Vi finner først løsningen for Y, ved å sette (3) og (2) inn i (1) og får følgende uttrykk:

$$Y = c_0 + c(Y - (t_0 + tY)) + I + G$$

Vi setter deretter alle Y leddene over på venstre side, og får:

$$Y - cY + ctY = c_0 - ct_0 + I + G$$

Vi setter så Y utenfor parentes og får:

$$Y(1 - c + ct) = c_0 - ct_0 + I + G$$

Til slutt deler vi med (1-c+ct) på begge sider av likhetstegnet og får et redusert form uttrykk for Y vi kaller (1*):

$$(1^*): Y = \frac{1}{1 - c(1-t)}\left[c_0 - ct_0 + I + G\right]$$

For å finne løsningen for T, setter vi løsningen for Y fra (1*) i hhv (3), og finner

$$(3^*): T = t_0 + \frac{t}{1 - c(1-t)}\left[c_0 - ct_0 + I + G\right]$$

For å finne løsningen for C og B, kan en sette inn løsningene for Y og T i (2) og B = T – G, og så regne ut uttrykkene. Alternativt kan man først erstatte T ved å sette inn for (3) i (2) og B = T – G, og så sette inn løsningen for Y. Vi bruker siste metode, som gir

$$(2^*): C = c_o + c(Y - t_0 - tY) = c_0 + c(1-t)Y - ct_0$$
$$= c_0 + \frac{c(1-t)}{1-c(1-t)}\left[c_0 - ct_0 + I + G\right] - ct_0$$
$$(4^*): B = T - G = t_0 + tY - G = t_0 + \frac{t}{1-c(1-t)}\left[c_0 - ct_0 + I + G\right] - G$$
$$= t_0 + \frac{t}{1-c(1-t)}\left[c_0 - ct_0 + I\right] - \left[1 - \frac{t}{1-c(1-t)}\right]G$$

(b)

For å finne økningen i de endogene variablene Y, C, T og B[1], bruker vi den generelle regelen for tilvekstform

Regel for tilvekstform: Dersom y = ax + b, så er Δy = aΔx

(1*) kan omskrives til

$$(1^{**}): Y = \frac{1}{1-c(1-t)}\left[c_0 - ct_0 + I + G\right] = \frac{1}{1-c(1-t)}G + \frac{1}{1-c(1-t)}\left[c_0 - ct_0 + I\right]$$

og vi ser at brøken foran G tilsvarer parameteren a i regelen, mens det siste leddet i (1**) tilsvarer parameteren b. Vi finner dermed at endringen i Y, ΔY, er gitt ved

$$(5) \qquad \Delta Y = \frac{1}{1-c(1-t)}\Delta G$$

For å finne ΔC, ΔT og ΔB, kan vi enten bruke samme metode på det endelige uttrykket i hhv. (2*), (3*) og (4*), eller vi kan bruke samme metode på mellomregningen med Y, og så bruke løsningen for ΔY fra (5). Begge metoder gir naturligvis samme svar. Vi bruker siste metode og får.

$$\Delta C = c(1-t)\Delta Y = \frac{c(1-t)}{1-c(1-t)}\Delta G > 0$$

$$\Delta T = t\Delta Y = \frac{t}{1-c(1-t)}\Delta G > 0$$

[1] Dersom du nå stusser over at vi kan ha fire endogene variable og kun tre ligninger er årsaken at B er definert ved en egen, og fjerde, ligning, nemlig B = T-G

$$\Delta B = t\Delta Y - \Delta G = \left[\frac{t}{1-c(1-t)} - 1\right]\Delta G = \left[\frac{t}{1-c(1-t)} - \frac{1-c(1-t)}{1-c(1-t)}\right]\Delta G$$
$$= \frac{-(1-c)(1-t)}{1-c(1-t)}\Delta G < 0$$

(for å kontrollere at overgangen i det siste likhetstegnet er korrekt, er det lettest å gå motsatt vei, ved å regne ut telleren i det siste uttrykket: (1-c)(1-t) = 1–c–t+ct = 1–c(1-t)–t), som er lik tellerne i de to brøkene på linjen over)

(c)

Vi antar nå at $\Delta G = \Delta t_0 > 0$. Myndighetene øker altså en inntektsuavhengig skatt og denne økes like mye som G. For å finne totaleffekten må vi altså finne ett uttrykk for ΔY uttrykt ved ΔG og ved Δt_0.

Uttrykkene for Δt_0 finner en ved å benytte tilsvarende fremgangsmåte som vi gjorde for å finne ΔG under (b).

Total effekt finner en ved å legge sammen effektene av ΔG og Δt_0.

Endogen variabel	**Effekt av ΔG**	**Effekt av Δt_0**	**Total effekt**
ΔY	$+\frac{1}{1-c(1-t)}\Delta G$	$-\frac{c}{1-c(1-t)}\Delta t_0$	$=\frac{1-c}{1-c(1-t)}\Delta G > 0$
ΔC	$+\frac{c(1-t)}{1-c(1-t)}\Delta G$	$-\frac{c}{1-c(1-t)}\Delta t_0$	$=-\frac{ct}{1-c(1-t)}\Delta G < 0$
ΔT	$+\frac{t}{1-c(1-t)}\Delta G$	$+\left(1-\frac{ct}{1-c(1-t)}\right)\Delta t_0$	$=\left(1+\frac{t(1-c)}{1-c(1-t)}\right)\Delta G > 0$
ΔB	$-\left[1-\frac{t}{1-c(1-t)}\right]\Delta G$	$+\left(1-\frac{ct}{1-c(1-t)}\right)\Delta t_0$	$=\frac{t(1-c)}{1-c(1-t)}\Delta G > 0$

Du kan teste svarene dine ved å benytte deg av en Excel-versjon av denne modellen som ligger på hjemmesiden, se M:\www_docs\E1310\Lekeark-keynes-oppg6.xls.