Oppgave 1: Matbutikk

Småbarnsforeldre trenger i blant å ta seg en øl. Anta at blant personer som handler på en bestemt matbutikk er 1/10 småbarnsforeldre, og at 1/3 av småbarnsforeldrene kjøper øl. Blant de som ikke er småbarnsforeldre, men som handler på denne butikken, kjøper 1/6 øl. Definer begivenhetene «Ø: personen kjøper øl» og «S: personen er småbarnsforelder».

[**Hint**: Det kan være nyttig å bruke sammenhengen $P(A \cap B) = P(A \; og \; B) = P(B)P(A|B)$.]

a) Finn sannsynlighetene P(Ø|S) og $P(Ø \cap S)$.

$$P(Ø|S) = \frac{1}{3}, P(Ø \cap S) = P(S)P(Ø|S) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{30} = 0.033$$

b) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig person på denne matbutikken kjøper øl?

$$P(Ø) = P(S)P(Ø|S) + \; P(Ø \cap \bar{S}) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{20} = \frac{11}{60} = 0.1833$$

c) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig person på butikken er småbarnsforelder, gitt at personen kjøper øl?

$$P(S|Ø) = \frac{P(S \cap Ø)}{P(Ø)} = \frac{1/10 \times 1/3}{11/60} = \frac{2}{11} = 0.1818$$

d) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig person på butikken er småbarnsforelder, gitt at personen *ikke* kjøper øl?

$$P(S|\bar{Ø}) = \frac{P(S \cap \bar{Ø})}{P(\bar{Ø})} = \frac{P(S)P(\bar{Ø}|S)}{P(S)P(\bar{Ø}|S) + P(\bar{S})P(\bar{Ø}|\bar{S})} = \frac{1/10 \times 2/3}{1/10 \times 2/3 + 9/10 \times 5/6}$$
$$= 0.8167$$

Oppgave 2: Smittsomt virus

Det har brutt ut et virus i samfunnet. Myndighetene ønsker å finne andelen smittede i befolkningen på et tidspunkt. Personer med symptomer, samt helsearbeidere og barnehage- og skoleansatte blir testet, og man finner at 15% tester positivt.

a) Er 0,15 et godt estimat på andelen smittede i hele befolkningen? Begrunn svaret ditt.

Nei. Utvalget er ikke representativt: symptomer, alder, eksponering etc..

b) Betegn sannsynligheten for at en tilfeldig utvalgt person fra befolkningen er smittet som p. Helsemyndighetene trekker et tilfeldig utvalg på 1000 personer fra befolkningen og tester. Anta at testen ikke er helt pålitelig, det vil si, erfaring fra tidligere virusutbrudd tilsier at sannsynligheten for «falskt negativt» resultat er 0.02. Det betyr at sannsynligheten for at en syk person tester positivt er 0.98. Du kan anta at sannsynligheten for «falske positive», det vil si at en frisk person tester positivt, er null. Av de 1000 som blir trukket, tester X personer positivt. Diskuter forutsetningene som må være oppfylt for at X skal være binomisk fordelt: $X \sim bin(1000, 0.98p)$.

Vi kan tenke på hver person som testes et Bernoulli-forsøk med to mulige utfall: positiv og negativ test. Vi må anta at sannsynligheten for å teste positivt er den samme for alle individer i populasjonen (dvs. samme smittesannsynlighet). Uavhengighet oppfylt pga. tilfeldig trukket utvalg. Antall som tester positivt i utvalget, X, er dermed binomisk fordelt med forventning $E(X) = n0.98p = 1000 \times 0.98p = 980p$, og varians $Var(X) = n0.98p(1 - 0.98p) = 980p(1 - 0.98p)$, der $0.98p$ er sannsynligheten for å teste positivt.

c) I resten av oppgaven kan du anta at $X \sim bin(1000, 0.98p)$. La den sanne smitteandelen i befolkningen være 0.05. Sett opp et uttrykk for sannsynligheten for at 50 personer i utvalget tester positivt. Det holder å sette opp uttrykket, du trenger ikke regne ut endelig verdi.

$P(X = 50) = \binom{1000}{50} (\frac{0.05}{0.98})^{50} (1 - \frac{0.05}{0.98})^{950}$

d) Forklar hva følgende kode i R regner ut:

```
> sum(dbinom(0:50,1000,0.05*0.98))
[1] 0.5950827
```

Sannsynligheten for at maksimalt 50 personer i utvalget tester positivt: $P(X \leq 50)$.

e) Vis at $\hat{p} = \frac{1}{0.98}\frac{X}{n}$ er en forventningsrett estimator for sannsynligheten, p, for at en tilfeldig trukket person i befolkningen er smittet. Finn standardfeilen til estimatoren.

$$E(\hat{p}) = E\left(\frac{1}{0.98}\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{980}E(X) = \frac{1}{980}980p = p$$

$$Var(\hat{p}) = Var\left(\frac{1}{0.98}\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{980^2}Var(X) = \frac{1}{980^2}980p(1 - 0.98p) = \frac{p}{980}(1 - 0.98p)$$

$$SE(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p}{980}(1 - 0.98p)}$$

f) Det blir trukket et tilfeldig utvalg på 1000 personer fra befolkningen. Av de 1000 personene i utvalget, er det 760 personer som sier ja til å ta testen. Blant disse tester 64 positivt. Finn et estimat for, og et 95% konfidensintervall for p, basert på de 760 personene som tar testen. [**Hint:** Du kan ta for gitt at X, og dermed $\hat{p}$, vil være tilnærmet normalfordelt når utvalget er stort. For å finne konfidensintervallet kan du bruke at den estimerte standardfeilen til $\hat{p}$ er 0.0103.]

Finner følgende estimat: $\hat{p}_{obs} = \frac{1}{0.98} \times \frac{64}{760} = 0.0859$.

Et 95% konfidensintervall: $\left[\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \widehat{SE(\hat{p})}\right] = [0.0859 \pm 1.96 \times 0.0103] = [0.0657; 0.1061]$

g) Gi en tolkning av konfidensintervallet. Ut ifra hvordan utvelgelse og testing ble foretatt, kan du tenke deg noen grunner til at den sanne smitteandelen p ligger utenfor konfidensintervallet?

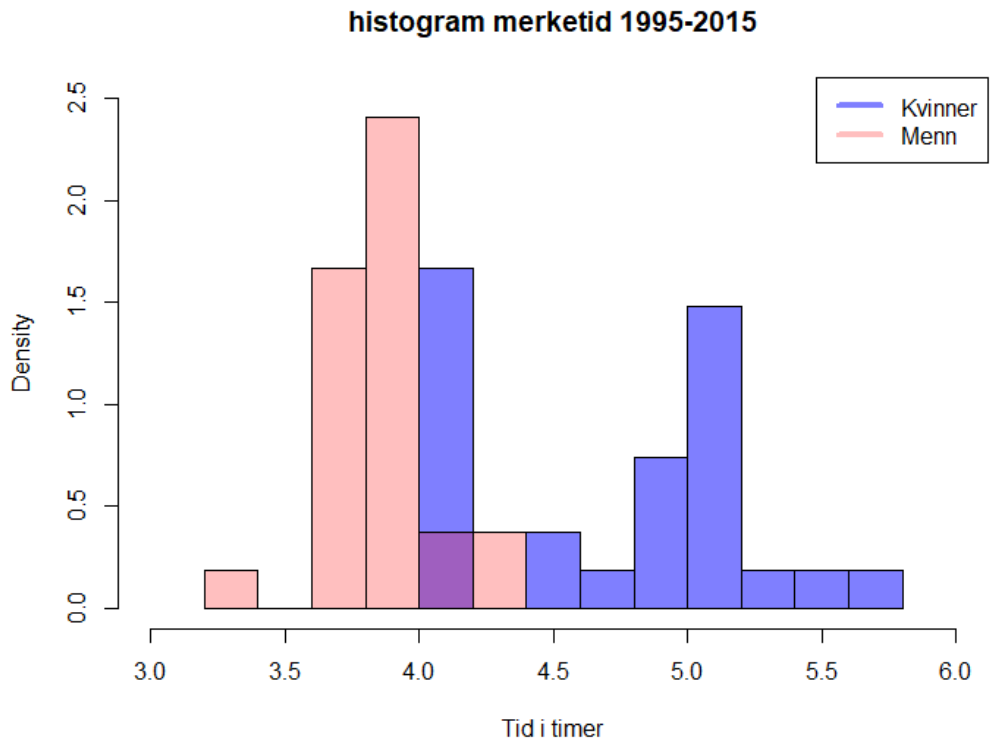
Intervaller konstruert på denne måten vil, ved gjentatte utvalg, dekke den sanne sannsynligheten, p, med sannsynlighet 0.95.
Selv om utvalget er representativt, utgjør ikke nødvendigvis de 760 personene som sier ja til å testes et representativt utvalg av befolkningen. Kan tenkes at friske er mindre tilbøyelige til å si ja til å testes enn syke.

Oppgave 3: Birken

Birkebeinerrennet er Norges største skirenn. Deltakerne får «merket» dersom de går rennet minst like raskt som merketiden. Merketiden beregnes separat for hver aldersklasse ved at det legges til 25% på gjennomsnittstiden for de fem beste som starter i den respektive aldersklassen.

A)

Under er et histogram for merketider for kvinner 30 år (blå søyler) og menn 30 år (rosa søyler) i Birkebeinerrennet fra 1995-2015. Gi en kort beskrivelse og sammenlikning av fordelingene for kvinner og menn.



Gjennomsnittlig merketid er høyere for kvinner enn for menn, og også variansen er betydelig høyere for kvinner.

B)

Histogrammet er laget basert på data er fra en data frame «`merketid`», der variabelene «`tid_kvinner`» og «`tid_menn`» angir merketid for henholdsvis kvinner og menn. Under er en utskrift fra R med deskriptiv statistikk, der variabelnavnene «`tid_kvinner`» og «`tid_menn`» er erstattet med «`tid_###`» og «`tid_###`».

```
> deskr_stat=function(x) c(mean=mean(x), sd=sd(x), p=quantile(x, c(.10, .50
, .90)))
> deskr_stat(merketid$tid_###)
     mean        sd     p.10%     p.50%     p.90%
4.7025926 0.5073126 4.0700000 4.8800000 5.1720000
> deskr_stat(merketid$tid_###)
     mean        sd     p.10%     p.50%     p.90%
3.8697531 0.1959001 3.6666667 3.8500000 4.0666667
```

(i) Hvilken linje i utskriften er for kvinner, og hvilken er for menn? Hva er gjennomsnittlig merketid for kvinner? Begrunn kort svaret ditt.

(ii) Forklar kort hva `sd=0.507` betyr, og sammenlikn «`sd`» for de to kjønnene.

(iii) Kan du si noe om formen på histogrammet ved å sammenlikne «`mean`» og «`p.50%`» i utskriften?

(i) Øverste linje for kvinner. Gjennomsnittlig merketid for kvinner er 4.7.

(ii) sd=0,507 er standardavviket til merketiden for kvinner. Gjennomsnittlig avvik fra gjennomsnittlig merketid er 0,507 timer, dvs. en halvtime. Gjennomsnittlig avvik er mer enn dobbelt så høyt for kvinner som for menn. Merketid beregnes ut ifra snittiden til de fem beste løperne i klassen, dermed er det større variasjonen i tiden til de fem beste kvinnene enn i tiden til de fem beste mennene.

(iii) Gjennomsnitt og median er svært likt for menn. Det betyr at fordelingen er relativt symmetrisk.

c)

Dersom man sammenlikner verdensrekorden for kvinner og menn i forskjellige idretter, finner man ofte at rekordtiden for menn utgjør ca. 90% av rekordtiden for kvinner. Vi ønsker å teste om vi kan forkaste teorien at forventet tid en mann bruker på å gå et skirenn som Birkebeinerrennet utgjør 90% av en kvinnes forventede tid. Det vil si, vi ønsker å teste følgende hypoteser:

$$H_0: \mu_m = 0.90\mu_k \text{ mot } H_1: \mu_m \neq 0.90\mu_k,$$

der μ_m er forventet tid menn 30-34 bruker, og μ_k er forventet tid kvinner 30-34 bruker på Birkebeinerrennet. Utskriften nedenfor angir litt deskriptiv statistikk fra en data frame «`tid_birken`» basert på observasjoner av tiden kvinner 30-34 år og menn 30-34 år brukte på å gå Birkebeinerrennet i 2019. Du kan tenke på tidene fra 2019 som et utvalg av tider fra alle mulige tider menn og kvinner kan gå et renn som Birkebeinerrennet på – både opp til og med 2019, og i fremtiden. Anta at tidene for menn og kvinner er uavhengige av hverandre.

(i) Diskuter antakelsen om at tidene for menn og kvinner er uavhengige av hverandre.

(ii) Test hypotesen over på signifikansnivå 1%. Forklar eventuelle forutsetninger du gjør.

```
> deskr_stat=function(x) c(mean=mean(x), sd=sd(x), n=length(x))
```

```
> deskr_stat(tid_birken$tid)
     mean         sd          n
 4.740716   1.332650 796.000000
> aggregate(tid ~ kjonn, tid_birken, deskr_stat)
  kjonn     time.mean    time.sd     time.n
1     kvinner   5.535799   1.320323 169.000000
2     menn      4.526411   1.253358 627.000000
```

(i) Antakelsen urimelig pga. skiføre, kø i løypa, fall/ulykker osv.

(ii) Pga. store utvalg, vil ifølge sentralgrenseteoremet, gjennomsnittene være tilnærmet

normalfordelte: $\bar{X}_m \underset{\sim}{^{approx}} N(\mu_m, \frac{\sigma_m^2}{627})$ og $\bar{X}_k \underset{\sim}{^{approx}} N(\mu_k, \frac{\sigma_k^2}{169})$.

Formulerer hypoteser: H_0: $\theta = \mu_m - 0.9\mu_k = 0$ mot H_1: $\theta = \mu_m - 0.9\mu_k \neq 0$.

$$\hat{\theta} \underset{\sim}{^{approx}} N(\mu_m - 0.9\mu_k, \frac{\sigma_m^2}{627} + 0.9^2 \frac{\sigma_k^2}{169})$$

$$\widehat{SE(\hat{\theta})} = \sqrt{\frac{1.253^2}{627} + 0.9^2 \frac{1.320^2}{169}} = 0.104.$$

Testobservator:

$$T = \frac{4.526 - 0.9 \times 5.536 - 0}{0.104} = -4.388$$

Med et signifikansnivå $\alpha = 1\%$ forkaster vi nullhypotesen dersom $|T| > t_{\frac{\alpha}{2}}(169 + 627 - 2) = z_{0.005} = 2.576$. Forkaster altså H_0.

[Merknad: Her kan studentene alternativt beregne et Z-intervall siden n er stor, men dette bør de begrunne]

D) Anta at Birkebeinerrenn-tider for kvinner i aldersgruppen 30-34 år er normalfordelte stokastiske variabler med forventning 5,5 og standardavvik 1,3 timer. Nedenfor er en utskrift med en simulering fra R. Forklar hva tallet `0.00989236` er. Er dette tallet over eller under det teoretiske motstykket? Hva er det teoretiske motstykket?

```
> sim <- replicate(1e4, mean(rnorm(169, mean=5.5, sd=1.3)))
> var(sim)
[1] 0.00989236
```

Tallet er variansen til gjennomsnittlig tid kvinner 30-34 år bruker på birken ($\bar{X}_k$). Teoretisk motstykke $Var(\bar{X}_k) = \frac{1.3^2}{169} = 0.01$ som er (marginalt) høyere enn den simulerte variansen.