

HG

Revidert april 2010

## Oversikt over tester i Econ 2130

La  $\theta$  være en ukjent parameter (populasjons-størrelse) i en statistisk modell. Uttrykket “ukjent parameter” betyr at den “sanne” verdien av  $\theta$  i populasjonen er ukjent. Når vi setter opp en statistisk modell (som representerer populasjonen vi trekker data fra), antar vi i utgangspunktet at modellen er sann for en viss (ukjent) verdi av parameteren  $\theta$  og usann for alle andre verdier. Anførselstegnene rundt “sann” ovenfor skyldes at begrepet *sann parameterverdi* kun gir god mening dersom forutsetningene som er foretatt i modellen er realistiske forutsetninger om populasjonen.

I dette kurset har de hypotesene vi tester om (den “sanne” ukjente verdien av)  $\theta$  tre alternative former beskrevet i tabellen under. Merk at  $\theta_0$  står for en *kjent* (!) hypotetisk verdi som er bestemt av den underliggende problemstillingen: Den sanne verdien av  $\theta$  kan godt være lik  $\theta_0$ , men behøver slett ikke være det! Problemet er nettopp at vi ikke vet hvor den sanne verdien av  $\theta$  befinner seg.

Alternativ	$H_0$	$H_1$	Type
1	$\theta \leq \theta_0$	$\theta > \theta_0$	Ensidig problem
2	$\theta \geq \theta_0$	$\theta < \theta_0$	Ensidig problem
3	$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$	Tosidig problem

La  $\hat{\theta}$  være en aktuell estimator for  $\theta$ , slik at  $W = \frac{\hat{\theta} - \theta}{SE}$  er tilnærmet (noen få ganger eksakt)  $N(0, 1)$ -fordelt (uansett hva den sanne verdien av  $\theta$  måtte være), og der  $SE = SE(\hat{\theta})$  er en eller annen estimert versjon av standardfeilen til  $\hat{\theta}$ . Vår testobservator,  $Z = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{SE}$  får vi da ved å bytte ut  $\theta$  med  $\theta_0$  i  $W$ .  $Z$  kan brukes som testobservator i alle de tre alternative problemene.

**Merk (NB!) forskjellen mellom  $Z$  og  $W$ :  $W$  er en *ikke-observerbar* stokastisk variabel med samme (tilnærmet) *kjente* fordeling uansett hva den sanne verdien av  $\theta$  er (dvs  $W$  er en såkalt *pivotal*).  $Z$ , derimot, er en *observerbar* stokastisk variabel som er (tilnærmet)  $N(0, 1)$ -**

fordelt *bare* hvis  $\theta = \theta_0$  (for i så fall, og bare da, er  $Z = W$ ). Hvis den sanne verdien  $\theta$  er forskjellig fra  $\theta_0$ , har  $Z$  en annen sannsynlighetsfordeling som ikke er  $N(0, 1)$ !

Siden  $\hat{\theta}$  er en estimator for den ukjente (sanne) verdien av  $\theta$ , har vi  $\hat{\theta} \approx \theta$ , hvorav  $Z \approx \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{SE}$  som er  $> 0$  hvis  $\theta > \theta_0$  og  $< 0$  hvis  $\theta < \theta_0$ .

Derfor bør vi forkaste  $H_0$  i problem-alternativ 1 hvis  $Z$  er tilstrekkelig stor positiv ( $Z > c_1$ ). I alternativ 2 bør vi forkaste  $H_0$  hvis  $Z$  er tilstrekkelig stor negativ ( $Z < c_2$ ), og i alternativ 3 bør vi forkaste  $H_0$  hvis  $Z$  enten er tilstrekkelig stor negativ eller tilstrekkelig stor positiv ( $Z < c_3$  eller  $Z > c_4$ ).  $c_1, c_2, c_3, c_4$  er passende kritiske verdier. Som det beste kompromiss mellom to motstridende krav til kontroll av sannsynligheten for feil av type I og feil av type II, viser det seg at de kritiske verdiene  $c_1, c_2, c_3, c_4$  i alle de tre alternativene enkelt kan bestemmes som løsningen av ligningen  $P_{\theta=\theta_0}(\text{Forkast } H_0) = \alpha$ , der  $\alpha$  er det valgte signifikansnivået. Merk at sannsynligheten i ligningen utvikles i det spesielle tilfellet at  $\theta = \theta_0$  der  $Z$  er (tilnærmet)  $N(0, 1)$ -fordelt. For eksempel i alternativ 3 får vi

$\alpha = P_{\theta=\theta_0}(\text{Forkast } H_0) = P_{\theta=\theta_0}(Z < c_3) + P_{\theta=\theta_0}(Z > c_4)$ . Velger vi  $\alpha/2$  for begge sannsynlighetene (som kan vises er det beste valget) får vi  $c_3 = -z_{\alpha/2}$  og  $c_4 = z_{\alpha/2}$ , der  $z_{\alpha/2}$  er  $\alpha/2$ -kvantilen i  $N(0, 1)$ .

**Tabell 1** Strukturen av  $Z$ -tester (Jfr. situasjon 1 og 3 i tabell 2 og alle tre situasjoner i tabell 3)

Alternativ	$H_0$	$H_1$	Testobservator	$\alpha$ -nivå test: Forkast $H_0$ hvis	$P$ -verdi ( $z_o$ er observert verdi av $Z$ )
1	$\theta \leq \theta_0$	$\theta > \theta_0$	$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{SE}$	$Z > z_\alpha$	$P_{\theta=\theta_0}(Z > z_o)$
2	$\theta \geq \theta_0$	$\theta < \theta_0$	$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{SE}$	$Z < -z_\alpha$	$P_{\theta=\theta_0}(Z < z_o)$
3	$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$	$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{SE}$	$Z < -z_{\alpha/2}$ eller $Z > z_{\alpha/2}$	$2 \cdot P_{\theta=\theta_0}(Z >  z_o )$

Mer konkret skriver vi ut nedenfor hvordan Z-testene ser ut for alternativ 1 i forskjellige modell-situasjoner i tabell 2 og 3. Alle testene er såkalte Z-tester. Eneste unntak er situasjon 2 i tabell 2 (t-test) der eneste forskjell er at  $N(0, 1)$ -fordelingen er byttet ut med  $t_{n-1}$ -fordelingen.

**Tabell 2** Tester for  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  mot  $H_1 : \mu > \mu_0$  (alternativ 1) når modell er (\*):  $X_1, X_2, \dots, X_n$  er uavh. og identisk fordelte med  $E(X_i) = \mu$  og  $\text{var}(X_i) = \sigma^2$  (Jfr. regel 6.15 og 6.16. Tilsvarende for alternativ 2 og 3 med samme testobservator.)

Situasjon	Forutsetninger (modell)	$n$	$\sigma$	Pivotal $W = \frac{(\hat{\theta} - \theta)}{SE}$	Testobservator $Z = \frac{(\hat{\theta} - \theta_0)}{SE}$	Forkastningskriterium	Signifikansnivå	P-verdi ( $z_o, t_o$ er observert verdi av $Z, T$ )
1	Modell (*) sammen med: $X_i \sim N(\mu, \sigma), i = 1, 2, \dots, n$	Vilkårlig	Kjent	$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$Z > z_\alpha$	Eksakt $\alpha$	$P_{\mu=\mu_0}(Z > z_o)$
2	Modell (*) sammen med: $X_i \sim N(\mu, \sigma), i = 1, 2, \dots, n$	Vilkårlig	Ukjent	$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$T > t_{n-1, \alpha}$	Eksakt $\alpha$	$P_{\mu=\mu_0}(T > t_o)$
3	Bare modell (*) der $X_i$ har vilkårlig fordeling	$n$ "stor", $n \geq 30$ (til nød $\geq 20$ )	Ukjent	$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \stackrel{\text{tilnærmet}}{\sim} N(0, 1)$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$Z > z_\alpha$	Tilnærmet $\alpha$	$P_{\mu=\mu_0}(Z > z_o)$
4	Bare modell (*) der $X_i$ har vilkårlig fordeling	$n$ liten	Ukjent	<b>Ikke pensum</b>				

**Merknad 1.** I praksis er antakelig situasjon 3 den viktigste/vanligste. Løvås er dessverre litt knapp i omtalen av denne. Han nevner den kun i en bisetning (etter "eller" i den siste setningen i regel 6.16).

**Merknad 2.** Styrkefunksjonen er hos Løvås bare angitt i situasjon 1. Den kan naturligvis også bestemmes i de andre situasjonene, men er litt mer kompliserte og ikke pensum.

**Tabell 3 Z-tester for alternativ 1 i tabell 1 (basert på regel 5.20 (normaltilnærming for binomisk, hypergeometrisk og poisson fordeling)). Signifikansnivå tilnærmet  $\alpha$ . (Tilsvarende for alternativ 2 og 3 som i tabell 1)**

<i>Modell</i>	<i>Estimator</i> $\hat{\theta}$	<i>Betingelse for normaltilnærming</i>	<i>Pivotal</i> $W = \frac{(\hat{\theta} - \theta)}{SE} \stackrel{\text{tilnærmet}}{\sim} N(0, 1)$ (uansett $\theta$ )	<i>Testobservator</i> $Z = \frac{(\hat{\theta} - \theta_0)}{SE} \stackrel{\text{tilnærmet}}{\sim} N(0, 1)$ (hvis $\theta = \theta_0$ )	<i>Forkastningskriterium</i>	<i>P-verdi</i> ( $z_o$ er observert verdi av $Z$ )
$X \sim \text{bin}(n, p)$	$\hat{p} = \frac{X}{n}$	$\text{var}(X) \geq 5$ $(np(1-p) \geq 5)$	$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \stackrel{\text{tilnærmet}}{\sim} N(0, 1)$	$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$	$Z > z_\alpha$	$P_{p=p_0}(Z > z_o)$
$X \sim \text{hypergeom.}(n, M, N)$ ( $p = M/N$ )	$\hat{p} = \frac{X}{n}$	$\text{var}(X) \geq 5$	$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}}} \stackrel{\text{tilnærmet}}{\sim} N(0, 1)$	$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}}}$	$Z > z_\alpha$	$P_{p=p_0}(Z > z_o)$
$X \sim \text{pois}(t\lambda)^1$	$\hat{\lambda} = \frac{X}{t}$	$\text{var}(X) \geq 5$ ( $t\lambda \geq 5$ )	$\frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\lambda/t}} \stackrel{\text{tilnærmet}}{\sim} N(0, 1)$	$Z = \frac{\hat{\lambda} - \lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/t}}$	$Z > z_\alpha$	$P_{\lambda=\lambda_0}(Z > z_o)$

<sup>1</sup> Husk at notasjonen  $X \sim \text{pois}(m)$  er valgt slik at det som står på  $m$ 's plass alltid er lik  $E(X)$  (som også er lik  $\text{var}(X)$  i poisson-fordelingen). Hvis det for eksempel i en oppgave fremgår at  $X \sim \text{pois}(3, 7)$ , følger automatisk at  $E(X) = \text{var}(X) = 3, 7$ . Av modellen i tabellen følger således at  $E(X) = \text{var}(X) = t\lambda$ .

**Merknad 3** Merk at vi (som i Løvås) har brukt  $p_0$  og  $\lambda_0$  i stedet for  $\hat{p}$  og  $\hat{\lambda}$  i SE i nevneren på  $Z$ . Dette er for å forbedre tilnærmelsen til normalfordelingen i ligningen  $P_{\theta=\theta_0}(\text{Forkast } H_0) = \alpha$  til bestemmelse av den kritiske verdien. Merk at for å løse denne ligningen med hensyn på den kritiske verdien trenger vi bare å kjenne fordelingen til  $Z$  i det tilfellet at den sanne  $\theta$  skulle være lik  $\theta_0$ . Med denne måten å tenke på trenger vi altså ikke å estimere SE i pivotalen. En alternativ test (ikke nevnt i pensum) er å bruke  $\hat{p}$  og  $\hat{\lambda}$  istedenfor i SE. Den test-varianten har tilnærmet de samme egenskapene som den foreslåtte og dukker ofte opp i litteraturen.

## Regresjonsmodellen

Tester for ukjente parametre i den enkle standard regresjonsmodellen med normalfordelte restledd følger samme mønsteret som situasjon 2 i tabell 2, med eneste forskjell at  $n-2$  frihetsgrader benyttes i  $t$ -fordelingen istedenfor  $n-1$  som i situasjon 2. Testobservatoren har, som ovenfor, i alle tilfeller formen

$$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{SE(\hat{\theta})} \text{ som er } t_{n-2} \text{-fordelt i det spesielle tilfellet at } \theta = \theta_0,$$

og signifikansnivået<sup>2</sup>  $\alpha$  gjelder eksakt for alle  $n \geq 3$ .

Hvis  $n \geq 30$ , kan  $t_{n-2}$ -fordelingen byttes ut med  $N(0,1)$  og testen vil ha signifikansnivå tilnærmet  $\alpha$  selv om  $y$ -observasjonene er trukket fra en vilkårlig annen fordeling enn normalfordelingen.

---

<sup>2</sup> Denne alfaen må ikke forveksles med konstantleddet alfa i regresjonsfunksjonen  $\mu(x) = \alpha + \beta x$  i populasjonen (Løvås' notasjon).