Jon Vislie; mars 2014

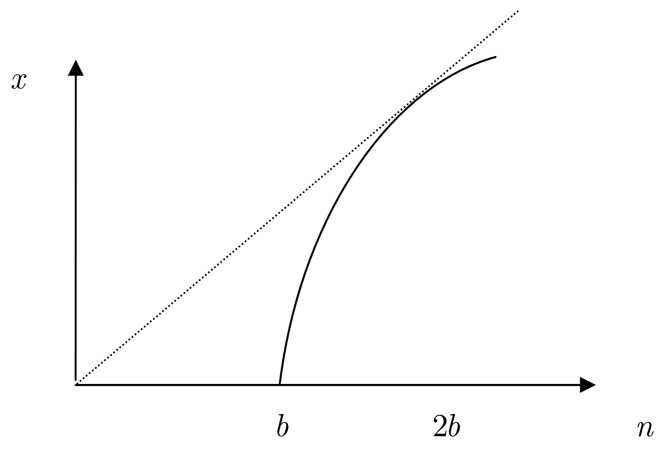
ECON 2200 – VÅREN 2014: Oppgaver til plenumsøvelse den 12.mars

Oppgave 1

En bedrift har produktfunksjonen $x = \sqrt{n-b}$, der b er en positiv konstant. Skisser grafen til denne og angi egenskapene til produktfunksjonen (ved gjennomsnittsproduktivitet, grenseproduktivitet, grenseelastisitet og produktakselerasjon). Hvordan varierer gjennomsnittsproduktiviteten med n?
Utled den inverse til produktfunksjonen og den tilhørende kostnadsfunksjonen, når w er en gitt pris per enhet av n. Hva er tolkningen av wb? Utled grensekostnad og samlet gjennomsnittskostnad. Illustrer disse kostnadene.
La pris per enhet av x være p. Hva er betingelsen for at bedriften vil produsere? Hvis drift lønner seg, hva er det profittmaksimerende kvantum av det ferdige produktet? Hvordan varierer tilbudt kvantum med prisene?

Svar:

Produktfunksjonen $x = \sqrt{n-b} = (n-b)^{\frac{1}{2}}$, vil ha den egenskapen at $x = 0 \; \forall n \le b$, der b er en positiv konstant. Vi kan tegne denne opp:



La $F(n) = (n-b)^{\frac{1}{2}}$, der $F'(n) = \frac{1}{2}(n-b)^{-\frac{1}{2}} > 0 \; \forall n > b$, med $F''(n) = -\frac{1}{4}(n-b)^{-\frac{3}{2}} < 0$, i de områdene med positiv produktmengde. Videre har vi $\frac{x}{n} = \frac{(n-b)^{\frac{1}{2}}}{n}$ som er null for $n \le b$ og positiv ellers. Grenseelastisiteten er definert som

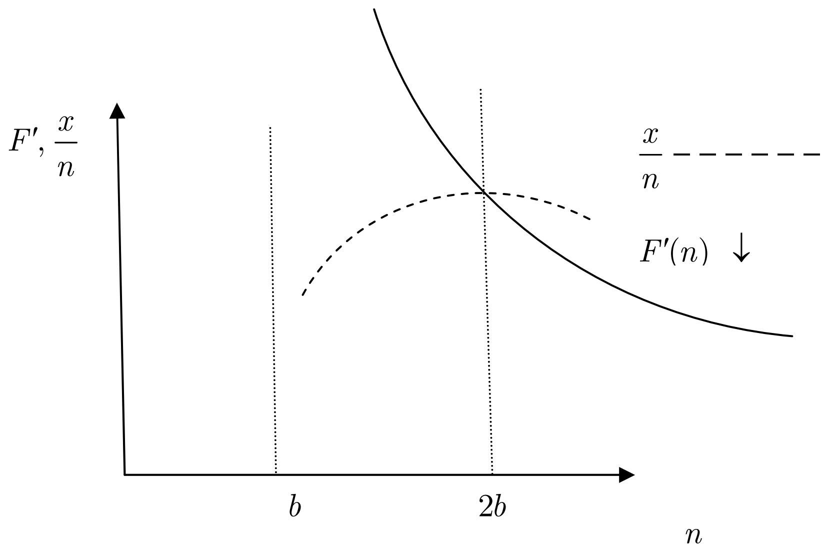
$El_n F(n) = \frac{n}{x}F'(n) = \frac{F'(n)}{\frac{x}{n}} = \frac{n}{(n-b)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{2}(n-b)^{-\frac{1}{2}} = \frac{n}{2(n-b)} := \varepsilon(n)$. Videre ser vi at

$\varepsilon'(n) = \frac{2(n-b)\cdot 1 - 2n}{4(n-b)^2} = -\frac{2b}{4(n-b)^2} < 0$. Samtidig har vi at $\lim_{n\downarrow b}\varepsilon(n) = \infty$ og

$\lim_{n\to\infty}\varepsilon(n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(1-\frac{b}{n})} = \frac{1}{2}$. Produktfunksjonen har et regulært ultra-passum forløp, med $\varepsilon > 1$ for «små» verdier av n og med $\varepsilon < 1$ for «store» verdier på n. For øvrig vil $\varepsilon(n) = 1$ for $n = 2b$.

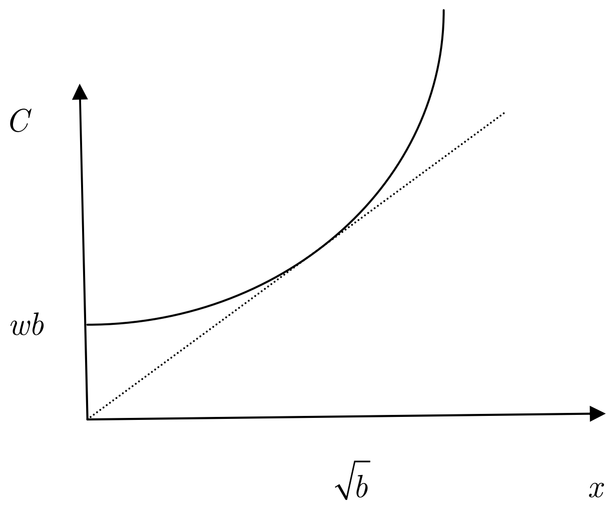
Hvordan varierer $\frac{x}{n}$ med n? Vi finner: $\frac{d}{dn}(\frac{F(n)}{n}) = \frac{nF'(n) - F(n)}{n^2}$. Setter vi inn, får vi: $\frac{d}{dn}(\frac{x}{n}) = \frac{1}{n^2}\left[\frac{n}{2}(n-b)^{-\frac{1}{2}} - (n-b)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{n^2}(n-b)^{-\frac{1}{2}}[\frac{n}{2} - (n-b)] = \frac{(n-b)^{-\frac{1}{2}}}{n^2}[b - \frac{n}{2}]$

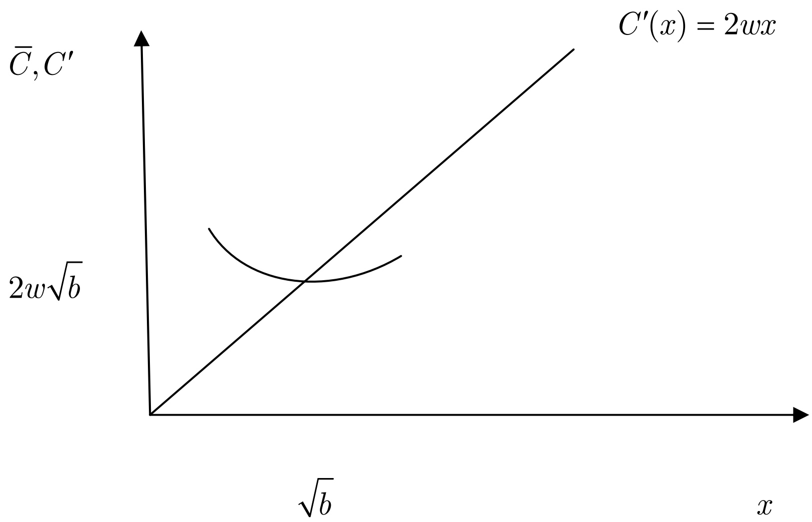
som oppnår et maksimum for $n = 2b$; dvs. der $\varepsilon(n) = 1$. (Bruk førstederivert-testen for å avgjøre at det er et max.) Vi kan illustrere gjennomsnitts- og grenseproduktivitet i et diagram; der grenseproduktiviteten er heltrukket, mens gjennomsnittsproduktiviteten er stiplet:



Vi skal utlede kostnadsfunksjonen ved å gå veien om den inverse til F:

$x = \sqrt{n-b} \Rightarrow n - b = x^2 \Leftrightarrow n = G(x) = x^2 + b$, med kostnadsfunksjonen $C(x) = wG(x) = wx^2 + wb$; en variabel del og en driftsavhengig fast kostnad (som faller bort om vi velger midlertidig driftsstans), men som løper i det øyeblikk vi velger å produsere. Grensekostnad: $C'(x) = 2wx$, med $C''(x) = 2w$ og $\overline{C}(x) := \frac{C(x)}{x} = wx + \frac{wb}{x}$ som når et minimum for: $\frac{d\overline{C}(x)}{dx} = w - \frac{wb}{x^2} = 0$ for $x = \sqrt{b}$. Vi kan illustrere dem:



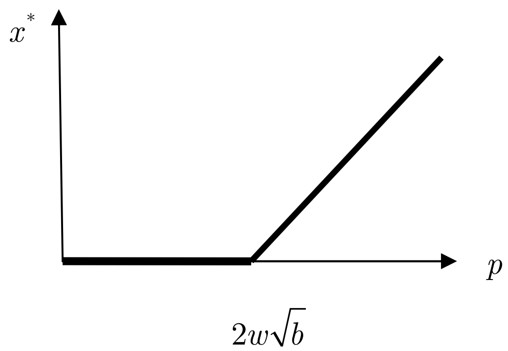


I minimumspunktet for gjennomsnittskostnaden må vi ha at

$C'(\sqrt{b}) = \bar{C}(\sqrt{b}) = w\sqrt{b} + \frac{wb}{\sqrt{b}} = 2w\sqrt{b}$. Bare produktprisen i det minste er lik $2w\sqrt{b}$, vil bedriften velge produsert kvantum større enn null slik at $\pi(x) = px - wx^2 - wb$ bli maksimert.

Vi har at $\pi'(x) = p - 2wx > 0$ for $x < \frac{p}{2w}$, $\pi'(x) = p - 2wx < 0$ for $x > \frac{p}{2w}$, og følgelig nå et maksimum for $x^* = \frac{p}{2w}$, der vi har $\pi(\frac{p}{2w}) = \frac{p^2}{2w} - w\frac{p^2}{4w^2} - wb = \frac{p^2}{4w} - wb \geq 0$ for $p^2 \geq 4w^2 b \Leftrightarrow p \geq 2w\sqrt{b}$.

Gitt at prisen oppfyller dette minimumskravet, ser vi at $x^* = s(p,w) = \frac{p}{2w}$, som stiger med produktprisen og synker med lønna, mens tilbudt kvantum er lik null for $p < 2w\sqrt{b}$.



Oppgave 2 (Denne ble ikke gjennomgått i plenum – gjør det på egen hånd!)
Produktfunksjonen $X = F(N, K)$ antas å være homogen av grad én og med strengt positive og avtakende grenseproduktiviteter. Vis at vi da kan skrive produktmengde

per arbeider, $x := \frac{X}{N} = f(k) := F(1, \frac{K}{N})$, der k er kapitalmengde per arbeider; dvs. $k := \frac{K}{N}$.

Fra sammenhengen $F(N,K) = N \cdot f(\frac{K}{N})$ skal du utlede hvordan vi kan uttrykke de to grenseproduktivitetene $\frac{\partial F}{\partial N}$ og $\frac{\partial F}{\partial K}$ ved $f(k)$ og $f'(k)$.

Svar:

At $F(N,K)$ er homogen av grad én i (N,K), betyr at $F(tN,tK) = tF(N,K)$; med andre ord har vi: $X = F(N,K) = \frac{1}{t}F(tN,tK)$. Setter vi $t = \frac{1}{N}$, får vi:

$X = F(N,K) = NF(1,\frac{K}{N}) := Nf(k)$, der k er kapital per arbeider; slik at $\frac{X}{N} := x = f(k)$ er produktmengde per arbeider.

Vi finner da:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = Nf'(k)\frac{\partial k}{\partial K} = Nf'(k)\frac{1}{N} = f'(k)$$

$$\frac{\partial F}{\partial N} = f(k) + Nf'(k)\frac{\partial k}{\partial N} = f(k) + Nf'(k)(-\frac{K}{N^2}) = f(k) - kf'(k)$$

Hva med de øvrig deriverte?

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} = f''(k)\frac{1}{N} < 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial N^2} = f'(k)(-\frac{K}{N^2}) - f'(k)(-\frac{K}{N^2}) - kf''(k)(-\frac{K}{N^2}) = \frac{1}{N}\left[-f'(k)k + f'(k)k + k^2 f''(k)\right]$$
$$= \frac{k^2}{N}f''(k) < 0$$

$\frac{\partial^2 F}{\partial N \partial K} = \frac{\partial}{\partial N}\frac{\partial F}{\partial K} = f''(k)(-\frac{K}{N^2}) > 0$: faktorene er teknisk kompelemtære

[Ikke spurt om: Siden F er homogen av grad én, vil hver av grenseproduktivitetene være homogene av grad null; dvs.

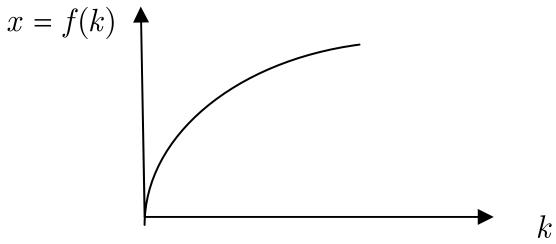
$F_N(tN, tK) = F_N(N, K)$. Da finner vi ved derivasjon av denne likheten mhp. t at:

$$\frac{\partial F_N(tN, tK)}{\partial(tN)}\frac{\partial(tN)}{\partial t} + \frac{\partial F_N(tN, tK)}{\partial(tK)}\frac{\partial(tK)}{\partial t} = 0$$

Setter vi t = 1: $F_{NN} \cdot N + F_{NK} \cdot K = 0$ Tilsvarende for den andre, slik at vi har:

$F_{KN} \cdot N + F_{KK} \cdot K = 0$) Betrakt den første av disse: $\frac{k^2}{N} f''(k) \cdot N + f''(k)(-\frac{K}{N^2}) \cdot K = 0$

Under visse forutsetninger vil vi da ha et forløp for $f(k)$ som:



Dette var den oppgaven vi ikke fikk gjennomgått, samt noen ytterliger egenskaper.]

Oppgave 3

Vi betrakter en liten åpen økonomi som består av to konkurranseutsatte sektorer. I hver sektor produseres en vare ved hjelp av (homogen) arbeidskraft. I den ene sektoren produseres en vare i mengde x ved hjelp av produktfunksjonen $x = F(n)$. Her er n bruk av arbeidskraft. Du skal anta at $F(0) = 0, F' > 0, F'' < 0$, samt at $F'(0) = \infty$. Nå vil $x-$varen kunne selges på verdensmarkedet til en gitt pris p. Den andre varen produseres i mengde $y = G(m)$, der m er bruk av arbeidskraft i denne sektoren. Produktfunksjonen G har tilsvarende egenskaper som F, samtidig som $y-$varen selges til en gitt pris (q) på verdensmarkedet.

Samlet mengde arbeidskraft tilgjengelig for denne økonomien er eksogent gitt ved N.

a) Finn den fordelingen av arbeidsstyrken på de to sektorene som maksimerer nasjonalinntekten $pF(n) + qG(m)$.

Svar:

Vi skal velge (*n*,*m*) slik $pF(n) + qG(m)$ maksimeres gitt at $n + m \leq N$.

Det vil alltid være ønkelig å bruke alle tilgjengelige ressurser, slik at vi kan skrive vårt maksimeringsproblem som: $Max_n \left\{R(n) := pF(n) + qG(N-n)\right\}$.

Vi har $R'(n) = pF'(n) + qG'(m)(-1) = pF'(n) - qG'(m)$

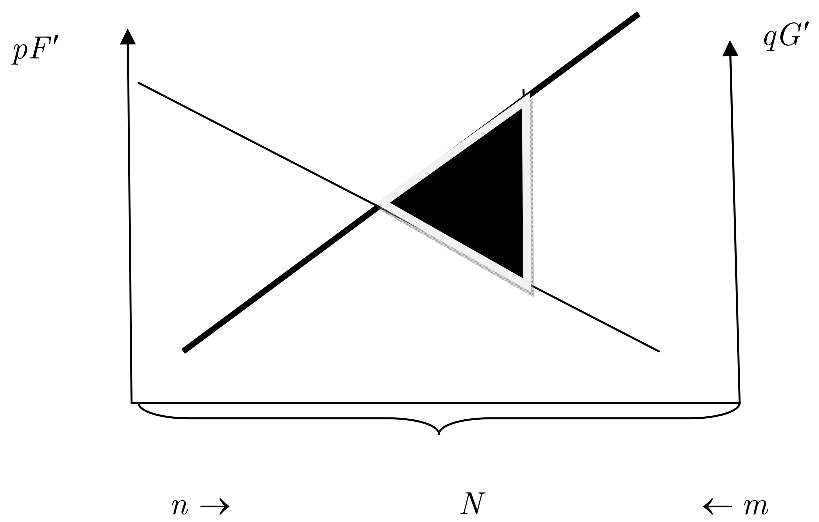
$R''(n) = pF''(n) - qG''(m)(-1) = pF''(n) + qG''(m) < 0$, med våre forutsetninger.

Hvis det da eksisterer en $n^* > 0$ slik at $R(n^*) \geq R(n)$ for alle tillatte n, da har vi et maksimumspunkt. Legg merke til at om $R'(0) = pF'(0) - qG'(N) > 0$ og $R'(N) = pF'(N) - qG'(0) < 0$, da vil den optimale sysselsettingen i sektor 1 være bestemt ved førsteordensbetingelsen $pF'(n^*) = qG'(m^*)$, der $m^* = N - n^*$. Verdi av grenseproduktivitet skal være den samme i begge sektorer; lik marginal verdiskaping. Den siste arbeidstimen skal kaste like mye av seg!

b) Illustrer løsningen i et badekardiagram og begrunn hvorfor den løsningen du anbefaler, faktisk gir maksimal nasjonalinntekt. Vis spesielt allokeringstapet eller tapet i nasjonalinntekt av at allokeringen ikke oppfyller den betingelsen du skal ha utledet.

Svar:

Avsett pF' som en fallende kurve fra venstre mot høyre, mens qG' avsettes som en fallende kurve fra høyre mot venstre.



Hvis $n > n^*$, da har vi et allokerings- eller inntektstap svarende til arealet av den skraverte trekanten i figuren. Mellom faktisk og optimal fordeling av arbeidskraften er det et tap svarende til «summen av alle vertikale differenser $qG' - pF'$ over det nevnte sysselsettingsintervallet».

c) Hvordan påvirkes den optimale fordelingen av arbeidskraft mellom sektorene om
- Produktprisen p øker
- Samlet tilbud av arbeidskraft øker

Svar:
Når produktprisen p øker vil vi vente at en større del av sysselsettingen vil bli anvendt i denne sektoren. Lett å se i figuren. Vise det analytisk:
Fra $pF'(n^*) = qG'(N - n^*)$, kan vi utlede $n^* = n(p,q,N)$. Bruker vi dette i FOB, finner vi:

$$F'(n^*) + pF''(n^*)\frac{\partial n}{\partial p} = qG''(m^*)(-\frac{\partial n}{\partial p}) \Rightarrow \underbrace{\left[pF'' + qG''\right]}_{-} \cdot \frac{\partial n}{\partial p} = -F' < 0 \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial p} > 0$$

Vi har med andre ord: $\frac{\partial n}{\partial p} = \frac{F'}{(-R'')} > 0$, som er mindre jo nærmere null F' er; og

følgelig er $\frac{\partial m}{\partial p} < 0$. Økningen i p fremkommer som et positivt vertikalt skift i $pF' - kurven$. For uendret allokering vil vi få høyere inntekt. I tillegg vil det være ønskelig å øke bruken av arbeidskraft i den sektor som har oppnådd høyere produktpris. På marginen skal vi ha at den økte verdskapingen av den siste timen satt inn i $x-$sektoren akkurat skal oppveie den tapte, tilhørende verdiskapingen i den andre sektoren.

Samlet tilbud av arbeidskraft øker: Økt bredde i badekaret.
Fra $pF'(n(p,q,N)) = qG'(N - n(p,q,N))$ finner vi nå:

$$pF''\frac{\partial n}{\partial N} = qG'' \cdot \left[1 - \frac{\partial n}{\partial N}\right] \Leftrightarrow R'' \cdot \frac{\partial n}{\partial N} = qG'' \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial N} = \frac{qG''}{R''} = \frac{qG''}{pF'' + qG''} \in \left[0,1\right]$$

(Vi kan skrive denne som (ble ikke vist i plenum):

$$\frac{\partial n}{\partial N} = \frac{1}{1 + \frac{p}{q}\frac{F''}{G''}} = \frac{1}{1 + \frac{m}{n}\underbrace{\frac{pF'}{qG'}}_{=1}\frac{\frac{F''}{F'}n}{\frac{G''}{G'}m}} = \frac{1}{1 + \frac{m}{n}\frac{El_n F'}{El_m G'}}$$

Den økte sysselsettingen fordeler seg på de to sektorene. Bare i unntakstilfelle, vil hele økningen kun skje i en av sektorene; når? Jo, hvis F' er nesten konstant, slik at $El_n F' \approx 0$, da vil hele økningen i N finne sted i sektor 1.)