Plenumsregning 6: Implisitt derivasjon og differensiering

Oppgave 6.1:
Deriver y med hensyn på x når sammenhenger er gitt ved identiteten

$$x^2 + y^2 \equiv 9$$

Finn også den andrederiverte.

Oppgave 6.2 La

$$\begin{aligned} z &= f(x, y) \\ x = t \qquad &\text{og} \qquad y = g(t) \end{aligned}$$

(a) Finn et uttrykk for $\frac{dz}{dt}$.

La nå funksjonen $g(t)$ være valgt slik at z tar verdien $\bar{z}$ for alle valg av t.

(b) Uttrykk dette som en identitet.

(c) Dersom $g(t)$ er valgt på denne måten, kan du da si noe mer om $\frac{dz}{dt}$?

(d) Dersom f er voksende i begge variablene, hva kan du da si om nivåkurvene til funksjonen f?

Oppgave 6.3 Oppgave 3.5 løste problemet å maksimere

$$f(x) = u(x) + m - px \text{ for } x \geq 0 \text{ og } px \leq m$$

der nyttefunksjonen u er konkav og ikke-avtagende, og m og p er positive parametre. Problemet ble løst både for tilfellet med indre løsning og tilfellet med hjørneløsning. Du kan gjerne lete opp løsningen fra da.

I denne oppgaven skal vi bare se på tilfellet med indre løsning. Betrakt førsteordensbetingelsen som en identitet som *implisitt* bestemmer x som en funksjon av p.

(a) Finn et uttrykk for $x'(p)$ ut fra førsteordensbetingelsen.

(b) Kan du si noe om fortegnet på $x'(p)$?

Oppgave 6.4 Betrakt problemet:

$$\begin{aligned} \text{maksimer } f(x,y) &= xy \\ \text{under bibetingelsen } g(x,y) &= x^2 + y^2 = 32 \end{aligned}$$

(a) Sett opp Lagrangefunksjonen og finn de 4 stasjonærpunktene.

(b) Beregn verdien av $f(x,y)$ i stasjonærpunktene. Hvilke punkter er kandidater til å være maksimumspunkter?

Selv om ligningen $x^2 + y^2 = 32$ definerer en sirkel (ikke en funksjonsgraf!), vil den definere y implisitt som en funksjon av x *lokalt*, hvis vi først bestemmer oss for fortegnet til y.

(c) Finn y' og beregn spesielt verdien i de fire stasjonærpunktene.

Nivåkurvene for funksjonen xy (dvs. ligningen $xy = c$) gir tilsvarende y som en funksjon av x.

(d) Finn et eksplisitt uttrykk for denne funksjonen og deriver den. Beregn igjen spesielt den deriverte i de fire stasjonærpunktene.

(e) Illustrer løsningen grafisk. Bruk resultatene fra (c) og (d).

Oppgave 6.5 Beregn differensialene til

(a) $z = 3x^2 + y^3$, (b) $z = x \ln y$, (c) $z = xu$ der $u = u(x,y)$

der funksjonen $\ln y$ har derivert $1/y$ (dette har dere ikke lært enda, men bruk resultatet). Approksimer deretter endringene i z når x øker fra 2 til 2.01, og y avtar fra 1 til 0.98.