1 Oppgave 1

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - x^{-2} \\ f'(x) &= 2x + 2x^{-3} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{g(x)} \\ f'(x) &= \frac{g(x) - xg'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (xy+1)^2 \\ f'_x &= 2(xy+1)y \\ f'_y &= 2(xy+1)x \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (\sqrt{xy}+1)^2(\sqrt{xy}-1)^2 \\ f'_x &= 2(\sqrt{xy}+1)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}(\sqrt{xy}-1)^2 + (\sqrt{xy}+1)^2 2(\sqrt{xy}-1)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} \\ &= (\sqrt{xy}+1)(\sqrt{xy}-1)\sqrt{\frac{y}{x}}((\sqrt{xy}-1)+(\sqrt{xy}+1)) \\ &= 2y(xy-1) \text{ fordi} \\ (\sqrt{xy}+1)(\sqrt{xy}-1) &= xy-1 \\ (\sqrt{xy}-1)+(\sqrt{xy}+1) &= 2\sqrt{xy} \\ \sqrt{\frac{y}{x}}2\sqrt{xy} &= 2y \end{aligned}$$

Den siste forenklingen er ikke påkrevd at de skal se. f'_y blir tilsvarende $2x(xy-1)$

2 Oppgave 2

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x - x^3 \\ f'(x) &= 3 - 3x^2 \end{aligned}$$

Stasjonærpunkt

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 \\ x &= 1 \text{ og } x = -1 \end{aligned}$$

b) Funksjonen tilfredsstiller ikke tilstrekkelige betingelser da

$$f''(x) = -6x$$

altså konveks for $x \leq 0$ og konkav for $x \geq 0$, altså ikke konkav overalt eller konveks overalt.

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \\ f(1-) &= -2 \end{aligned}$$

Men

$$\begin{aligned} f(10) &= -970 \\ f(-10) &= 970 \end{aligned}$$

Så 1 og -1 er ikke globale maksimum.

c)

$$\begin{aligned} f''(1) &= -6 < 0 \text{ så lokalt maksimum} \\ f''(-1) &= +6 > 0 \text{ so lokalt minumum} \end{aligned}$$

3 Oppgave 3

4

$$g(t) = \min\left((x-t)^2 + 2x\right)$$

a) FOB er

$$\begin{aligned} 2(x-t) + 2 &= 0 \\ x^* &= t - 1 \end{aligned}$$

Funksjonen er konveks.

b)

$$g(t) = \left((x^* - t)^2 + 2x^*\right) = (-1)^2 + 2(t-1) = 2t - 1$$

c)

$$g'(t) = 2$$

d)

$$\begin{aligned} g(t) &= \min\left((x-t)^2 + 2x\right) \\ g'(t) &= 2(x^* - t)(-1) \quad (= 2 \text{ siden } x^* - t = -1) \end{aligned}$$

5 Oppgave 4

$$\begin{aligned}
& \max pf(n) - wn \\
pf'(n) - w &= 0 \\
f'(n) &= \frac{w}{p}
\end{aligned}$$

Andreordensbetingelsen er oppfylt bare dersom $f''(n) \leq 0$, med entydighet for $f''(n) < 0$.

b) Deriver

$$f'(n(p,w)) = \frac{w}{p}$$

med hensyn på w gir

$$\begin{aligned}
f''(n)\frac{\partial n}{\partial w} &= \frac{1}{p} \\
\frac{\partial n}{\partial w} &= \frac{1}{pf''(n)}
\end{aligned}$$

c)Vi ser at

$$\frac{\partial n}{\partial w} = \frac{1}{pf''(n)} < 0 \text{ om } f''(n) < 0 \text{ som er 2. ordens betingelsen}$$

d)

$$\begin{aligned}
y &= f(n(p,w)) \\
\frac{\partial y}{\partial w} &= f'(n)\frac{\partial n}{\partial w} = \frac{f'(n)}{pf''(n)}
\end{aligned}$$

Oppgave 5

Vi har fra produktfunksjonen uteldet faktorfunksjonen eller nødvendig faktorinnsats, $n = G(x)$, slik at kostnadsfunksjonen blir $c(x;w) = wG(x)$, der vi vet at

$G'(x) = \dfrac{1}{F'(G(x))} > 0$. Vi har dermed at grensekostnaden er

$c'(x;w) = \dfrac{dc}{dx} = wG'(x) = \dfrac{w}{F'(G(x))}$. Fra denne kan vi da finne

$c''(x;w) = \dfrac{d^2c}{dx^2} = \dfrac{0 \cdot F' - wF''(G(x)) \cdot G'(x)}{(F'(G(x)))^2} = -\dfrac{wF''(G(x))}{(F'(G(x)))^3} > 0$ siden vi har at $F'' < 0$.

Oppgave 6

Profitten til bedriften med den angitte produktfunksjonen, med $a = 0{,}5$ og $b = 0{,}25$, er da gitt ved $\pi(n,k) = pn^a k^b - wn - qk$. (Jeg bruker a og b for å gjøre det enklere, for så å sette inn tallene.) Vi kan da regne ut:

$$\frac{\partial \pi}{\partial n} = apn^{a-1}k^b - w = ap\frac{x}{n} - w \text{ og } \frac{\partial^2 \pi}{\partial n^2} = a(a-1)pn^{a-2}k^b = pa(a-1)\frac{x}{n^2}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial k} = bpn^a k^{b-1} - q = bp\frac{x}{k} - q \text{ og } \frac{\partial^2 \pi}{\partial k^2} = b(b-1)pn^a k^{b-2} = b(b-1)p\frac{x}{k^2}$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial n \partial k} = abpn^{a-1}k^{b-1} = abp\frac{x}{nk}$$

Fra den første av førsteordensbetingelsene $\dfrac{\partial \pi}{\partial n} = ap\dfrac{x}{n} - w = 0 = \dfrac{\partial \pi}{\partial k} = bp\dfrac{x}{k} - q$ finner

vi: $\dfrac{wn}{px} = a$. Den andre gir: $\dfrac{qk}{px} = b$. Disse to sammen med produktfunksjonen gir oss tre likninger til å løse for de tre ukjente (x,n,k). Siden vi vil bruke noe av begge faktorene, vil også produktmengden være positiv. Vi ser at $\pi_{nn} < 0$ og

$$\pi_{nn}\pi_{kk} - (\pi_{nk})^2 = (pa(a-1)\frac{x}{n^2})(pb(b-1)\frac{x}{k^2}) - (abp)^2\frac{x^2}{n^2k^2}$$

$$= abp^2\frac{x^2}{n^2k^2}(a-1)(b-1) - (abp)^2\frac{x^2}{n^2k^2}$$

$$= abp^2\frac{x^2}{n^2k^2}\left[ab - a - b + 1 - ab\right] = abp^2\frac{x^2}{n^2k^2}(1 - a - b) > 0$$

Derfor er det faktorpunktet som oppfyller førsteordensbetingelsene et profittmaksimum.

Fra produktfunksjonen finner vi da, når vi setter inn fra de to førsteordensbetingelsene:

$x = n^a k^b = \left[\frac{apx}{w}\right]^a \left[\frac{bpx}{q}\right]^b = a^a b^b p^{a+b} x^{a+b} w^{-a} q^{-b} \Rightarrow x^{1-(a+b)} = a^a b^b p^{a+b} w^{-a} q^{-b}$ som vi kan løse for tilbudt kvantum (tilbudsfunksjonen), når vi lar $a + b := \varepsilon$:

(1) $\quad x = x(p,w,q) = \left[a^a b^b\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} p^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} w^{-\frac{a}{1-\varepsilon}} q^{-\frac{b}{1-\varepsilon}}$. (Kan sette inn for a og b.)

(De ubetingede) Faktoretterspørselsfunksjonene finner vi så ved å sette inn fra (1) i de to førsteordensbetingelsene:

(2) $$n = \frac{apx}{w} = a\frac{p}{w}x = \left[a^a b^b\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} p^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} w^{-\frac{a}{1-\varepsilon}} q^{-\frac{b}{1-\varepsilon}} apw^{-1} = a^{1+\frac{a}{1-\varepsilon}} b^{\frac{b}{1-\varepsilon}} p^{1+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} w^{-(1+\frac{a}{1-\varepsilon})} q^{-\frac{b}{1-\varepsilon}}$$
$$= a^{\frac{1-b}{1-\varepsilon}} b^{\frac{b}{1-\varepsilon}} p^{\frac{1}{1-\varepsilon}} w^{-\frac{1-b}{1-\varepsilon}} q^{\frac{-b}{1-\varepsilon}} = n(p,w,q)$$

Og på tilsvarende vis finner vi:

(3) $$k = \frac{bpx}{q} = k(p,w,q) = a^{\frac{a}{1-\varepsilon}} b^{\frac{1-a}{1-\varepsilon}} p^{\frac{1}{1-\varepsilon}} w^{\frac{-a}{1-\varepsilon}} q^{-\frac{1-a}{1-\varepsilon}}$$

Da ser vi direkte at:

a) $\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\frac{x}{p} > 0, \frac{\partial n}{\partial p} = \frac{1}{1-\varepsilon}\frac{n}{p} > 0, \frac{\partial k}{\partial p} = \frac{1}{1-\varepsilon}\frac{k}{p} > 0$

b) $\frac{\partial x}{\partial w} = -\frac{a}{1-\varepsilon}\frac{x}{w} < 0, \frac{\partial n}{\partial w} = -\frac{1-b}{1-\varepsilon}\frac{n}{w} < 0, \frac{\partial k}{\partial w} = -\frac{a}{1-\varepsilon}\frac{k}{w} < 0$. (Helt tilsvarende kan vi finne virkningen av en økninng i q.)

c) $(w,q) \to (tw,tq)$, $t > 1$. Dette kan, fra førsteordensbetingelsene analyseres som om produktprisen p synker; siden vi har $n = \frac{apx}{w} \to \frac{apx}{tw} = \frac{ax}{w}\frac{p}{t} = \frac{a\hat{p}x}{w}$, med $\hat{p} := \frac{p}{t} < p$. Kan da bruke svarene fra punkt a. (Tilsvarende for k og x.)

d) $(p,q) \to (tp,tq)$ med $t > 1$. Analyseres som om w synker:
$n = \frac{apx}{w} \to n(tp,w,tq) = \frac{atpx}{w} = \frac{apx}{\frac{w}{t}} = t\frac{apx}{w} > \frac{apx}{q} = n(p,w,q)$. Dette innebærer, fra svaret under punkt b at n, x og k alle **øker**.

e) $(p,w,q) \to (tp,tw,tq)$. Vi har at $n(tp,tw,tq) = n(p,w,q)$ og $k(tp,tw,tq) = k(p,w,q)$. Dermed er også $x(tp,tw,tq) = x(p,w,q)$. Med andre ord: Ingen endring i tilpasningen.

Hva blir profittfunksjonen? Vi har når vi setter inn for $n(p,w,q)$ og $k(p,w,q)$ i profitten, at den maksimerte profitten blir en funksjon av prisene:

$$\pi(n(p,w,q),k(p,w,q)) := \Pi(p,w,q) = p\left[a^{\frac{1-b}{1-\varepsilon}}b^{\frac{b}{1-\varepsilon}}p^{\frac{1}{1-\varepsilon}}w^{-\frac{1-b}{1-\varepsilon}}q^{\frac{-b}{1-\varepsilon}}\right]^a \left[a^{\frac{a}{1-\varepsilon}}b^{\frac{1-a}{1-\varepsilon}}p^{\frac{1}{1-\varepsilon}}w^{\frac{-a}{1-\varepsilon}}q^{-\frac{1-a}{1-\varepsilon}}\right]^b$$
$$-w\left[a^{\frac{1-b}{1-\varepsilon}}b^{\frac{b}{1-\varepsilon}}p^{\frac{1}{1-\varepsilon}}w^{-\frac{1-b}{1-\varepsilon}}q^{\frac{-b}{1-\varepsilon}}\right] - q\left[a^{\frac{a}{1-\varepsilon}}b^{\frac{1-a}{1-\varepsilon}}p^{\frac{1}{1-\varepsilon}}w^{\frac{-a}{1-\varepsilon}}q^{-\frac{1-a}{1-\varepsilon}}\right]$$

Dette kan, med god tid og tunga rett i munnen, gjøres noe enklere. Kan da vise at

$\Pi(p,w,q) = (1-\varepsilon)p^{\frac{1}{1-\varepsilon}}\left[\dfrac{w}{a}\right]^{-\frac{a}{1-\varepsilon}}\left[\dfrac{q}{b}\right]^{-\frac{b}{1-\varepsilon}}$. (Forventer ikke at de komme helt frem.)

Oppgave 7

Vi har $x = F(hN)$ der h er arbeidstid per sysselsatt per uke, og N er antall syselsatte. Dermed er hN antall utførte timeverk per uke, og x produktmengde per uke. Vi har $F(0) = 0, F' > 0, F'' < 0$. Med git produktpris p og gitt timelønn w, er profitten per uke $\pi = pF(hN) - whN$.

a) Hva er den profittmaksimerende størrelsen på antall sysselsatte? For gitte priser og gitt h, skal da π maksimeres med hensyn på N. Vi har da førsteordensbetingelsen (bruk kjerneregelen):
$pF'(hN)\cdot h - wh = 0 \Leftrightarrow pF'(hN) - w = 0$, samtidig som vi har $pF''(hN)h^2 < 0$.
(Dersom $pF'(0)\cdot h > w$, og $pF'(hN)\cdot h < w$ når $N \to \infty$, da har vi en løsning.)

b) Hva er virkningen av kortere arbeidstid for uendret timelønnj? Fra $pF'(hN) - w = 0$, og med w konstant, finner vi da ved å derivere med hensyn på h når vi har at $pF'(hN) - w = 0$ definerer N som en funksjon av h. (En behøver strengt tatt ikke derivere, siden $F'(hN) = \dfrac{w}{p}$ og konstant. Da må hN også være konstant; slik at hvis h synker med 10 %, vil N øke med 10 %.)
Vi finner dog ved derivasjon at $pF''(hN)\cdot\left[N + h\dfrac{\partial N}{\partial h}\right] = 0$, slik at
$\dfrac{\partial N}{\partial h} = -\dfrac{N}{h} \Leftrightarrow El_h N = \dfrac{h}{N}\dfrac{\partial N}{\partial h} = -1$.

c) Om wh skal holdes uendret, må altså w øke med like mange prosent som h synker med. Fra $pF'(hN)\cdot h - wh = 0,$ med $wh = W$ konstant, vil vi ha at kortere arbeidstid nå kan analyseres ved å derivere gjennom $pF'(hN)\cdot h - W = 0$ med hensyn på h. Vi finner da:
$pF'(hN) + phF''(hN)\cdot\left[N + h\dfrac{\partial N}{\partial h}\right] = 0 \Rightarrow \dfrac{h}{N}\dfrac{\partial N}{\partial h} = -1 - \dfrac{F'}{hNF''}$ som betyr at

sysselsettingen **vokser** om arbeidstiden **går ned**, gitt samme lønn per uke, om vi har $\frac{F'}{hN(-F'')} < 1$, og nedgang i sysselsettingen om ulikhetstegnet snus.

Oppgave 8

Vi har $x = F(n) = \sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$. Vi kan enten løse dette profittmaksimeringsproblemet direkte eller ved å gå veien om kostnadsfunksjonen, som her er $C(x;w) = wx^2$.

Profitten, på den direkte måten, er da: $\pi(n) = p\sqrt{n} - wn$. Vi ser fra denne at vi har

$\pi'(n) = \frac{1}{2}pn^{-\frac{1}{2}} - w = \frac{p}{2\sqrt{n}} - w$ og $\pi''(n) = -\frac{p}{4}n^{-\frac{3}{2}}$

a) For hvilke verdier av n har vi ikke-negativt overskudd? For $n = 0$ har vi $\pi(0) = 0$, og det finnes en positiv verdi på n, slik at $\sqrt{n}(p - w\sqrt{n}) = 0$, nemlig for $\sqrt{n} = \frac{p}{w} \Leftrightarrow n = (\frac{p}{w})^2$. All den tid vi har $\pi'(0) = \infty$ og $\pi'(\frac{p^2}{n^2}) = \frac{p}{2 \cdot \frac{p}{w}} - w = \frac{w}{2} - w < 0$, samtidig som i intervallet $(0, \frac{p^2}{w^2})$ har $\pi''(n) < 0$, da vil profitten være ikke-negativ nettopp i intervallet $\left[0, \frac{p^2}{w^2}\right]$. Og den har dermed et maksimum i dette intervallet.

b) Vi vet på grunnlag av de nevnte opplysninger at det må finnes en verdi på n i det indre av intervallet $\left[0, \frac{p^2}{w^2}\right]$ og som maksimerer overskuddet. La den verdien på *n* som maksimerer $\pi(n)$ være n^*; bestemt av

$\pi'(n^*) = 0 = \frac{p}{2\sqrt{n^*}} - w \Leftrightarrow \sqrt{n^*} = \frac{p}{2w} \Leftrightarrow n^* = \frac{p^2}{4w^2}$. Vi har her at $\pi' > 0$ for $n < n^*$ og $\pi' < 0$ for $n > n^*$. Det er nok å bruke «førstederivert-testen». Vi har dermed at faktoretterspørselsfunksjonen er $n^* = \frac{p^2}{4w^2}$ og produkttilbudsfunksjonen gitt ved $x^* = \sqrt{n^*} = \frac{p}{2w}$.

c) Så lenge $\frac{p}{w}$ er slik at bedriften faktisk produserer, vil en økning i $\frac{p}{w}$ gi økt faktoretterspørsel og økt produkttilbud.

Oppgave 9

Vi har produktfunksjonen $x = n^a k^b = f(n,k)$; *a* og *b* positive konstanter; hver av dem mindre enn én.

a) Grenseproduktiviteter: $\dfrac{\partial f}{\partial n} = an^{a-1}k^b = a\dfrac{n}{n}n^{a-1}k^b = a\dfrac{x}{n}$; og $\dfrac{\partial f}{\partial k} = b\dfrac{x}{k}$.

Gjennomsnittsproduktiviteter: $\dfrac{x}{n} = n^{a-1}k^b$, $\dfrac{x}{k} = n^a k^{b-1}$

Produktakselerasjoner: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial n^2} = a(a-1)n^{a-2}k^b = a(a-1)\dfrac{x}{n^2}$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial k^2} = b(b-1)n^a k^{b-2} = \dfrac{x}{k^2}$ og $\dfrac{\partial^2 f}{\partial k \partial n} = \dfrac{\partial}{\partial k}\dfrac{\partial f}{\partial n} = abn^{a-1}k^{b-1} = ab\dfrac{x}{nk}$

Grenseelastisiteter: $\varepsilon_n = El_n f(n,k) = \dfrac{n}{x}\dfrac{\partial f}{\partial n} = \dfrac{n}{x}a\dfrac{x}{n} = a$ og tilsvarende

$\varepsilon_k = El_k f(n,k) = \dfrac{k}{x}\dfrac{\partial f}{\partial k} = \dfrac{k}{x}b\dfrac{x}{k} = b$. Vi vet at at skalaelastisiteten (passuskoeffisienten) $\varepsilon = \varepsilon_n + \varepsilon_k = a + b$.

b) Anta gitt produktmengde: $x_0 = n^a k^b$. Løs for k:

$$k^b = \frac{x_0}{n^a} = x_0 n^{-a} \Rightarrow k = \left[x_0 n^{-a}\right]^{\frac{1}{b}} = x_0^{\frac{1}{b}} n^{-\frac{a}{b}}$$

c) Hvordan er helningen og krumningen til en isokvant?

$\dfrac{dk}{dn} = -\dfrac{a}{b}x_0^{\frac{1}{b}}n^{-\frac{a}{b}-1} = -\dfrac{a}{b}x_0^{\frac{1}{b}}n^{-(\frac{a+b}{b})} < 0$; fallende isokvanter og

$\dfrac{d^2k}{dn^2} = \dfrac{a}{b}\dfrac{a+b}{b}x_0^{\frac{1}{b}}n^{-(\frac{a+b}{b})-1} = \dfrac{a(a+b)}{b^2}x_0^{\frac{1}{b}}n^{-(\frac{a+2b}{b})} > 0$; krummet mot origo.

$MTSB = -\dfrac{dk}{dn} = \dfrac{f_n}{f_k} = \dfrac{a\frac{x}{n}}{b\frac{x}{k}} = \dfrac{a}{b}\dfrac{k}{n}$ som er avtakende i n.

Oppgave 10

a) Den nyttemaksimerende tilpasningen med opplysningene gitt i teksten, følger fra: $Max_{(x,y)}\left\{x + v(y) \middle| x + py = m\right\}$. Sett inn for x fra budsjettbetingelsen i $U(x,y) = x + v(y) = m - py + v(y)$. Problemet er da redusert til å finne det

konsumet av y-varen som løser dette problemet. Det er antatt at $v'(0) > p$.
Optimalt konsum er da bestemt ved at $v'(y) - p = 0$, samtidig som inntekten er så høy at $x = m - py = m - v'(y)y > 0$. (Fra $v'(y) = p$ kan vi skrive $y = (v')^{-1}(p) := f(p)$.)

b) Hvordan varierer tilpasningen med endringer i m? For det første ser vi at y **ikke** avhenger av m. Hele inntektsendringen slår ut i etterspørselen etter x; dvs. $\frac{\partial x}{\partial m} = 1$ eller $E_x = El_m x = \frac{m}{x}\frac{\partial x}{\partial m} = \frac{m}{m - pf(p)} > 1$.

Hvordan virker en endring i prisen p? Fra $v'(y) = p$ kan vi avlede:

$v''(y)f'(p) = 1 \Rightarrow f'(p) = \frac{\partial y}{\partial p} = \frac{1}{v''} < 0$, mens

$\frac{\partial x}{\partial p} = -y - p\frac{\partial y}{\partial p} = -y(1 - \frac{p}{y}\frac{\partial y}{\partial p}) = -y(1 - \frac{p}{y}\frac{1}{v''})$ som kan være positiv elelr negativ, avhengig av hvor mye v' påvirkes av endringer i y.