# ECON 2915 Høst 2009
# Forelesning 2
# Chapter 3,Weil (2009)

Foreleser

Finn R. Førsund

# Neoklassisk produktfunksjon

$$Y = F(K, L)$$

– Grenseproduktiviteter

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0, \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L} \frac{>}{<} 0$$

– Homogenitet av grad 1

$$F(zK, zL) = zF(K, L)$$

# Cobb – Douglas funksjonen

$$Y = F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha},\ 0 < \alpha < 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} = \alpha(\alpha-1)AK^{\alpha-2}L^{1-\alpha} < 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} = (1-\alpha)(-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha-1} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L} = \frac{\partial}{\partial L}(\alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha}) = \alpha(1-\alpha)AK^{\alpha-1}L^{-\alpha} > 0$$

$$A(zK)^{\alpha}(zL)^{1-\alpha} = Az^{\alpha}K^{\alpha}z^{1-\alpha}L^{1-\alpha} = z^{\alpha}z^{1-\alpha}AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = zAK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

# Solow-modellen

- Produktfunksjon homogen av grad 1

$$Y = F(K, L)$$

- Økosirk

$$Y = C + I$$

- Investering fast andel av produksjonen

$$I = \gamma Y,\ 0 < \gamma < 1$$

- Konsumandelen

$$C = (1-\gamma)Y$$

- Akkumulering av kapital ved konstant depresieringsrate

$$\dot{K} = I - D = I - \delta K, 0 < \delta < 1$$

- Arbeidskraft, L, gitt

# Modellen på intensiv-form

$$Y = F(K,L) \Rightarrow \frac{Y}{L} = y = \frac{1}{L} F(K,L) = F(\frac{K}{L},1) = f(k)$$

$$\frac{I}{L} = i = \gamma \frac{Y}{L} = \gamma y$$

$$\frac{\dot{K}}{L} = \frac{I}{L} - \delta \frac{K}{L} = i - \delta k$$

- Innsetting for investering per arbeider

$$\frac{\dot{K}}{L} = i - \delta k = \gamma f(k) - \delta k$$

- Sammenhengen med endring i k

$$\dot{k} = (\frac{\dot{K}}{L}) = \frac{L\dot{K} - K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L}$$

# Langsiktig likevekt - Steady state

- Ingen endringer i et sett av endogene variable; y,c,i,k

$$\dot{k} = 0 = \gamma f(k) - \delta k$$

- Kan løses implisitt for k, så nøste opp via produktfunksjonen og økosirken
- Kan se den kvalitative løsning ved å tegne figur med k langs den horisontale akse og y,I,c langs den vertikale

# Eksplisitt løsning med Cobb-Douglas

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \Rightarrow y = \frac{1}{L}AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = A(\frac{K}{L})^{\alpha}L^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = Ak^{\alpha}$$

$$\gamma f(k) - \delta k = \gamma Ak^{\alpha} - \delta k = 0 \Rightarrow \frac{\gamma A}{\delta} = \frac{k}{k^{\alpha}} = k^{1-\alpha} \Rightarrow$$

$$(\frac{\gamma A}{\delta})^{1/(1-\alpha)} = k$$

$$y = Ak^{\alpha} = A((\frac{\gamma A}{\delta})^{1/(1-\alpha)})^{\alpha} = AA^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(\frac{\gamma}{\delta})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = A^{\frac{1}{1-\alpha}}(\frac{\gamma}{\delta})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

# Inntektsforskjeller i steady state

- To land, i og j, med forskjellig investeringsrate, ellers alle parametre like

$$\frac{y_i^{ss}}{y_j^{ss}} = \frac{A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\gamma_i}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\gamma_j}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} = \left(\frac{\gamma_i}{\gamma_j}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

# Endring i stady-state løsningene

- I steady state er løsningene for k,y,c,I funksjoner av parametrene $\gamma,\alpha,\delta$
- Vi kan finne virkningen av en endring ved å derivere løsningene mhp parameteren som endres

# Utenfor steady state

- Tempo i konvergens mot steady state

$$\dot{k} = \gamma f(k) - \delta k \Rightarrow$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \gamma \frac{f(k)}{k} - \delta$$

- Grenseproduktivitet f’ >0, men avtakende
- Vekstraten for k blir mindre i tallverdi dess nærmere vi er steady-state løsningen fra begge sider
- Lag figur basert på likningene ovenfor