Chapter 3 Solow-modellen

Forskjell mellom land i kapital per arbeider

Kapitalens rolle

i) Er produktiv
ii) Blir produsert; avveining forbruk – investering
iii) Gir avkastning
iv) Bærer av teknologi
v) Blir slitt ut eller foreldet

Produktfunksjonens egenskaper

$$Y = F(K, L),$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0, \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L} \gtrless 0$$

$$F(zK, zL) = uY,$$

$u > z$: økende skalautbytte

$u = z$: konstant skalautbytte

$u < z$: avtakende skalautbytte

$$F(zK, zL) = zF(K, L)$$

Homogenitet av grad 1; makro og lang sikt, rollen til frikonkurranse

Cobb - Douglas funksjonen; bruk i økonomifaget: Knut Wicksell, 1893, doktoravhandling.

Cobb, C. W.; Douglas, P. H. (1928). "A Theory of Production". *American Economic Review* **18** (Supplement): 139–165.

$$Y = F(K, L) = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}, \ 0 < \alpha < 1$$

A måler produktivitetsnivået.

Grenseproduktiviteter

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha A K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} = \alpha(\alpha - 1) A K^{\alpha-2} L^{1-\alpha} < 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = (1-\alpha) A K^{\alpha} L^{-\alpha} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} = (1-\alpha)(-\alpha) A K^{\alpha} L^{-\alpha-1} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L} = \frac{\partial}{\partial L}(\alpha A K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}) = \alpha(1-\alpha) A K^{\alpha-1} L^{-\alpha} > 0$$

Homogenitetsgraden av Cobb – Douglas funksjonen:

$$A(zK)^{\alpha}(zL)^{1-\alpha} = Az^{\alpha}K^{\alpha}z^{1-\alpha}L^{1-\alpha} = z^{\alpha}z^{1-\alpha}AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = zAK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

Hvordan estimere (tallfeste) Cobb – Douglas funksjonens parametre:

Arbeiodernes og kapitalens andel av inntekten, dvs andel av Y:

$$Maks\,\pi = pF(K,L) - wL - rK \Rightarrow$$

$$p\frac{\partial F}{\partial K} = r,\, p\frac{\partial F}{\partial L} = w$$

$$\frac{wL}{pY} = \frac{p\frac{\partial F}{\partial L}L}{pY},\frac{rK}{pY} = \frac{p\frac{\partial F}{\partial K}K}{pY} \text{ (innsetting for w og r)}$$

C – D:

$$\frac{wL}{pY} = \frac{p\frac{\partial F}{\partial L}L}{pY} = \frac{(1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha}L}{Y} = (1-\alpha)$$

$$\frac{rK}{pY} = \frac{p\frac{\partial F}{\partial K}K}{pY} = \frac{\alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha}K}{Y} = \alpha$$

Solow-modellen

Produktfunksjonen, homogen av grad 1; neo-klassisk forutsetning

$Y = F(K,L)$

Produksjonen brukes til konsum og investering

$Y = C + I$

Investering fast andel av produksjonen

$I = \gamma Y,\ 0 < \gamma < 1$

Konsumandel:

$C = (1-\gamma)Y$

Akkumulering av kapital ved en konstant depresieringsrate

$\dot{K} = I - D = I - \delta K, 0 < \delta < 1$ (bruker Newton-prikk over variabelen for deriverte mhp t)

Konstant befolkning = arbeidskraft (kan legge inn en andel)

Modellen på intensiv form, dvs. omforme variable til per arbeider

Produktfunksjonen

$$Y = F(K,L) \Rightarrow \frac{Y}{L} = y = \frac{1}{L}F(K,L) = F(\frac{K}{L},1) = f(k)$$

Investeringsfunksjonen

$$\frac{I}{L} = i = \gamma \frac{Y}{L} = \gamma y$$

Kapitalakkumulasjon

$$\frac{\dot{K}}{L} = \frac{I}{L} - \delta \frac{K}{L} = i - \delta k$$

Innsetting for investering per arbeider og for y

$$\frac{\dot{K}}{L} = i - \delta k = \gamma f(k) - \delta k$$

Sammenhengen med endring i k over tid og endring i total kapital over tid per arbeider (derivering av en brøk mhp t):

$$\dot{k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{L\dot{K} - K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L}$$

Vi får da

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} = \gamma f(k) - \delta k$$

Langsiktig likevekt; Steady state

De endogene variable i modellen får konstante verdier

På intensiv form er de endogene variable y, i og k.

For at disse skal få konstante verdier kan det ikke skje noen endring i kapital per arbeider; k = K/L.

For at $\dot{k} = 0$ må $\frac{\dot{K}}{L} = 0$. Vi får da:

$$0 = \gamma f(k) - \delta k$$

Denne kan løses for k, så finnes y ved bruk av produktfunksjonen.

Sentral figur i et y – k diagram, må kunnes.

Figur 3.6, tegn den inn her

Analytisk løsning med Cobb – Douglas

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \Rightarrow y = \frac{1}{L}AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = A(\frac{K}{L})^{\alpha}L^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = Ak^{\alpha}$$

Løsning for k i steady state

$$\gamma f(k) - \delta k = \gamma Ak^{\alpha} - \delta k = 0 \Rightarrow \frac{\gamma A}{\delta} = \frac{k}{k^{\alpha}} = k^{1-\alpha} \Rightarrow$$

$$k = (\frac{\gamma A}{\delta})^{1/(1-\alpha)}$$

Løsning for y

$$y = Ak^{\alpha} = A((\frac{\gamma A}{\delta})^{1/(1-\alpha)})^{\alpha} = AA^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(\frac{\gamma}{\delta})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = A^{\frac{1}{1-\alpha}}(\frac{\gamma}{\delta})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Virkning av endring i investeringsrate på steady-state løsningene

Generelt: derivere løsningene mhp den parameteren som endres

$$y = A^{\frac{1}{1-\alpha}}(\frac{\gamma}{\delta})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \quad \frac{\partial y}{\partial \gamma} = A^{\frac{1}{1-\alpha}}\frac{\alpha}{1-\alpha}(\frac{\gamma}{\delta})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{1}{\delta} > 0$$

Tegne dette skiftet, Figur 3.6

Solow-modellen som teori for inntektsforskjeller

Inntektsforskjeller mellom land i og j i steady state når det bare er investeringsratene som er forskjellige:

$$\frac{y_i^{ss}}{y_j^{ss}} = \frac{A^{\frac{1}{1-\alpha}}(\frac{\gamma_i}{\delta})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{A^{\frac{1}{1-\alpha}}(\frac{\gamma_j}{\delta})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} = (\frac{\gamma_i}{\gamma_j})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$ (sett inn α=1/3, investeringsandeler 0.20 og 0.05 for land i og j)

Landet med høyeste investeringsrate har den høyeste produksjon per arbeider i steady state.

Predikerte inntekstsforskjeller kan testes på data.

Solow-modellen som teori for relative vekstrater

Konvergens mot steady state, forskjeller i vekstrater utenfor steady state

Speed and convergence to steady state

Generelt:

$$\dot{k} = \gamma f(k) - \delta k$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \gamma\frac{f(k)}{k} - \delta$$

Poeng: f(k)/k synker med k, avtakende grenseproduktivitet

Bruk av Cobb – Douglas

$$\dot{k} = \gamma A k^{\alpha} - \delta k$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \gamma A k^{\alpha-1} - \delta$$

Figur med $\dot{k}/k$ på vertikalaksen og k langs horisontalaksen,

Figur 3.10 tegnes inn her

Prediksjon 1:

Hvis to land har samme investeringsrate men forskjellig inntektsnivå så vil landet med lavere inntekt ha raskere vekst.

Dette dreier seg om vekst utenfor steady state. Hvis det rikeste landet har inntekt per arbeider lavere enn steady state, så vil det fattigere landet vokse raskere.

Må se på konvergens mot steady state fra begge posisjoner utenfor steady state.

Hvis to land har samme inntektsnivå men forskjellige investeringsrater,så vil landet med høyere investeringsrate ha høyere vekst

Se på konvergens mot steady state, figur

Et land som øker investeringsraten vil få en økning i vekstraten

Sammenhengen investering og sparing

Hvorfor er investeringsrater forskjellige

Investeringer kan krysse landegrenser, ikke sparing

Inntektens virkning på sparing

Fattige land sparer mindre

Offentlig politikks rolle

Figur 3.9 tegnes inn her, forskjellig sparerate (her lik investeringsraten), hopp i spareraten som funksjon av inntektsnivået

$\gamma = s_1$ for $y < y^*$

$\gamma = s_2$ for $y \geq y^*$

Take-off teorien for økonomisk vekst