ECON 2915 – forelesning 2 (av 13)

Kapital som produksjonsfaktor. Solow-modellen.

Mandag 27.august, 2012

Tema på forelesning
de første seks gangene

Økonomisk vekst

(1) Innledning til økonomisk vekst. Rammeverk for analysen.
(2) Produksjonsfunksjonen. Solow-modellen.
(3) Malthus sin teori. Solow-modellen med befolkningsvekst.
(4) Humankapital. Produktivitetsmåling.
(5) Teknologi.
(6) Effektivitet.

Innledning til økonomisk vekst: oppsummering fra sist (kapittel 1)

Vi så på forskjellene mellom land, for enkeltår og over tid:

- hvor rikt et land er avhenger av hvilket BNP-mål vi bruker: total BNP eller BNP per innbygger?

- store forskjeller mellom land: både i inntektsnivå og vekstrater

- vekst måles som endringer i BNP (per innbygger) over tid

- BNP-sammenligning over tid: må korrigere for prisstigning

- BNP-sammenligning mellom land: felles valuta, vi korrigerer også for ulik kjøpekraft (bruker PPP valutakurser)

Eksponentiell vekst (repetisjon)

Vi ser på eksponentiell vekst: $y = a \cdot b^x$, hvor a er startverdien, b er gjennomsnittlig vekstfaktor som a øker med, x er antall år og y er sluttverdien (etter x år med vekstfaktoren b).

La a være BNP per innbygger (i landets valuta) i et gitt land i startåret. Vi måler a i faste priser.

Hvis a er 3000 og vekstfaktoren b er 1.03, så har vi $y = 3000 \times 1.03^x$, hvor x er antall år.

THE POWER OF COMPOUND GROWTH (Figur 1.2 i Weil)

Viktige regneregler

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

$$\ln x^p = p \ln x$$

Logaritmisk skala (repetisjon)

Likningen $y = a \cdot b^x$ kan skrives om til $\ln y = \ln b \cdot x + \ln a$ ($\ln b$ og $\ln a$ er konstanter). Se forrige side for regneregler.

Grafen blir **en rett linje** med stigningstallet $\ln b$ og konstantleddet $\ln a$.

Vi bruker en logaritmisk skala når vi ser på vekstprosessen (er veksten i BNP per innbygger typisk forutsigbar? se Weil s.11).

Notat på kurssiden: relevant både for forrige og dagens forelesning

Se notatet som ligger ute på emnesiden om eksponentiell vekst og om vekstrater i diskret tid og i kontinuerlig tid.

Vi bruker Δ-tegnet når tiden betraktes som en diskret variabel. Differansen fra et år til det neste: $\Delta x_t = x_{t+1} - x_t$.

Vi bruker prikk-notasjon når tiden betraktes som en kontinuerlig variabel: $\dot{x}$ er den deriverte av x mhp tid

Tema på slutten av forrige forelesning

Kapittel 2 i Weil-boka:
(i) korrelasjon vs. kausalitet (hvordan tolke spredningsdiagram)
(ii) et rammeverk for analysen av økonomisk vekst
(iii) kort om produksjonsfunksjonen

(Vi skal senere se på empirisk testing av modellen vi bruker.)

Dagens forelesning

Tema for dagens forelesning:
(1) Produksjonsfunksjonen
(2) Solow-modellen

Pensum for dagens forelesning:
Weil-boka, kapittel 3

Kapital ('physical capital') som innsatsfaktor i produksjonen

Med *kapital* ('physical capital') mener vi maskiner, bygninger, veier, kjøretøy, datamaskiner etc.

Kapital er 'verktøy' i produksjonen. Med mer kapital og med kapital av høyere kvalitet kan vi øke produksjonen.

Ulik tilgang til kapital er et viktig bidrag til forklaringen på hvorfor det finnes så store inntektsforskjeller mellom land.

Se Figur 3.1 i Weil-boka.

Økonomiske teorier før og nå

Før 1800-tallet var ikke den viktigste innsatsfaktoren (ved siden av arbeidskraften) kapital, men snarere *jordbruksland*. Dette gjenspeiles i tekstene til Ricardo og Malthus.

Kapital ble en stadig viktigere produksjonsfaktor pga teknologisk utvikling.

Se Tabell 3.1 i Weil-boka.

Kapitalens karakteristika

Viktige egenskaper ved kapital:
(1) produktivt (kan øke produksjonen ved kapitalbruk)
(2) produseres (i motsetning til naturressurser)
(3) begrenset antall brukere (i motsetning til idéer)
(4) kan gi avkastning (gir insentiver til anskaffelse)
(5) verdien forringes over tid (depresiering)

En lukket økonomi

Vi ser på en *lukket* økonomi:
innenlands investering = innenlands sparing.

Kapitalens rolle i produksjonen: en formell fremstilling

Produksjonsfunksjonen er gitt ved:

$$Y = F(K, L)$$

hvor Y står for produksjonen (BNP), K står for kapitalbeholdningen og L for antall arbeidere (L for Labor).

To antagelser om produksjonsfunksjonen:
(1) konstant skalautbytte
(2) positivt og avtagende marginalprodukt

Antagelse 1: Konstant skalautbytte

Vi antar at produksjonsfunksjonen har konstant skalautbytte:

$$F(zK, zL) = z^{1} F(K, L) = zF(K, L)$$

Funksjonen er *homogen av grad 1*. Sett f.eks. $z = 2$, dvs $F(2K, 2L)$: en dobling av hver av innsatsfaktorene (L og K) gir en dobling av produksjonen.

(homogen av grad < 1: avtagende utbytte mhp skalaen, homogen av grad > 1: økende utbytte mhp skalaen)

Omform variablene til per arbeider: "modellen på intensivform"

Vi setter $z = \frac{1}{L}$ (se forrige side).

$$F\left(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}\right) = \frac{1}{L}F(K, L) = \frac{Y}{L}$$

I vekstteorien ser vi typisk på BNP per innbygger eller per arbeider (les fotnoten i Weil-pensumboka s.52).

Produksjon *per arbeider* er en funksjon av kapital *per arbeider*:

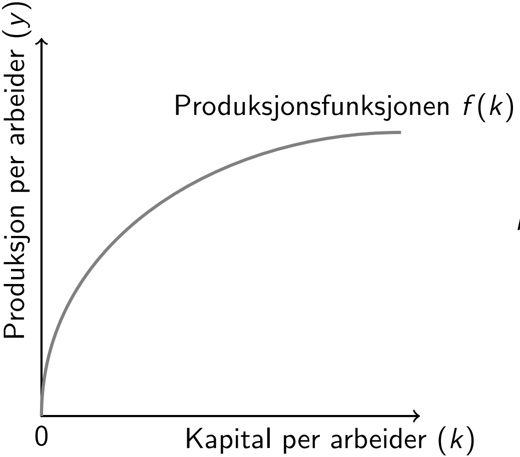
$$\frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right)$$

Modellen på intensivform

Vi bruker notasjonen $Y/L = y$ og $K/L = k$ og skriver:

$$y = f(k) \qquad \text{hvor } f'(k) > 0 \text{ og } f''(k) < 0$$

Antagelse 2: Positivt og avtagende marginalprodukt (se Figur 3.2)



Alt annet likt:
y øker når k øker
(positivt MPK)

...men økningen i y er mindre jo større k er i utgangspunktet
(avtagende MPK)

Nyttig å bruke en spesifikk funksjonsform

Det er ofte nyttig å bruke en spesifikk funksjonsform for å beskrive produksjonsprosessen. Vi bruker Cobb-Douglas.

For Cobb-Douglas-produksjonsfunksjonen gjelder de samme to antagelsene vi har gjennomgått,
(1) konstant skalautbytte
(2) positivt og avtagende marginalprodukt

Cobb-Douglas

L og K er innsatsfaktorene og $F(K, L)$ betegner produksjonen.

Cobb-Douglas-produksjonsfunksjonen er gitt ved,

$$F(K, L) = AK^{\alpha} L^{1-\alpha} \qquad 0 < \alpha < 1$$

hvor A måler produktivitetsnivået.

Hvordan kan vi tallfeste α ?

Kapitalens andel av nasjonal inntekt:

$$\frac{MPK \times K}{Y} = \frac{(\alpha A K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}) \times K}{A K^{\alpha} L^{1-\alpha}}$$

$$= \frac{\alpha A K^{\alpha} L^{1-\alpha}}{A K^{\alpha} L^{1-\alpha}} = \alpha$$

α er anslagsvis $1/3$ (se Figur 3.3 i Weil-boka.)

Antagelse 1: Konstant skala-utbytte (se appendikset til kap.3)

Cobb-Doglas-funksjonen har konstant skalautbytte:

$$F(zK, zL) = A(zK)^{\alpha}(zL)^{1-\alpha}$$

$$= z^{\alpha+1-\alpha} AK^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

$$= z^{1} F(K, L) = zF(K, L)$$

Antagelse 2: Positivt og avtagende marginalprodukt (se appendikset)

Cobb-Douglas-funksjonen:
marginalproduktet av kapital (MPK) er positivt og avtagende

$$MPK = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha A K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} > 0$$

$$\frac{\partial MPK}{\partial K} = (\alpha - 1)\alpha A K^{\alpha-2} L^{1-\alpha} < 0$$

Cobb-Douglas: per arbeider (modellen på intensivform)

Cobb-Doglas funksjonen per arbeider: $y = Ak^{\alpha}$

$$\frac{Y}{L} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}\left(\frac{L}{L}\right)^{1-\alpha}$$

$$y = Ak^{\alpha}$$

Solow-modellen: en enkel vekstmodell

Solow-modellen gir *en teori om inntektsforskjeller*; en enkel vekstmodell, hvor land med høyere sparerater vil ha høyere inntektsnivå, alt annet likt.

Modellen ble utarbeidet av Robert Solow i 1956.

Vi ser bort fra økt produktivitet (A holdes konstant når vi bruker Cobb-Douglas) og vi antar at antall arbeidere (L) er konstant over tid.

(I senere kapittel vil vi se på hva som skjer hvis vi tillater endringer i antall arbeidere og produktivitetsnivået.)

Nytt: beskrivelse av hvordan k bestemmes

Når vi setter opp Solow-modellen, benytter vi en produksjonsfunksjon med avtagende marginalprodukt og konstant skalautbytte (som vi har gått gjennom allerede).

I tillegg gir vi en beskrivelse av hvordan mengden kapital per arbeider bestemmes.

Endringen i kapitalbeholdningen (per arbeider)

Endringen i kapitalbeholdningen er differansen mellom mengden investering og mengden depresiering (per arbeider).

$$\Delta k = i - d$$

Antar at en konstant del av produksjonen blir investert og at en konstant del av kapitalbeholdningen depresierer hver periode:

$$i = \gamma y$$
$$d = \delta k$$

Ved å kombinere disse tre ligningene får vi et nytt uttrykk for endringen i k:

$$\Delta k = \gamma y - \delta k$$
$$\Delta k = \gamma f(k) - \delta k \tag{3.1}$$

Et uttrykk for endringen i kapitalbeholdningen

$$\Delta k = \gamma f(k) - \delta k \tag{3.1}$$

Endringen i kapitalbeholdningen

Anta at i år 2010 er mengden kapital per arbeider i et gitt land lik 120 og mengden produsert per arbeider, $f(k)$, er 60. Investeringen er lik 25% av produksjonen og kapitalens depresieringsrate er 5%. Da får vi:

$$\Delta k = \gamma f(k) - \delta k \tag{3.1}$$

$$\Delta k = 0.25 \times 60 - 0.05 \times 120 = 15 - 6 = 9$$

Det vil si at endringen i kapitalbeholdningen per arbeider er lik 9 enheter. Mengden kapital per arbeider i 2010 i det gitte landet er dermed $120 + 9 = 129$.

Stasjonær tilstand ('steady state') i Solow-modellen

Endringen i kapitalbeholdningen over tid er gitt ved:

$$\Delta k = \gamma f(k) - \delta k \tag{3.1}$$

$\Delta k > 0$ hvis $\gamma f(k) > \delta k$
$\Delta k < 0$ hvis $\gamma f(k) < \delta k$

$\Delta k = 0$ hvis $\gamma f(k) = \delta k$, som gir modellens stasjonærtilstand ('steady state'). Kapitalbeholdningen i stasjonærtilstanden kaller vi k^{ss}. Det tilsvarende produksjonsnivået kaller vi y^{ss}.

Hvis kapitalnivået er k^{ss}, så endres ikke kapitalbeholdningen over tid. Hvis $k \neq k^{ss}$ (og dermed $y \neq y^{ss}$), beveger økonomien seg mot likevektspunktet ('the steady state') over tid.

Se Figur 3.4 og 3.6 i Weil-boka (sentrale figurer!)

Kapitalens vekstrate

$$\text{kapitalens vekstrate} = \frac{\Delta k}{k} \qquad \text{hvor } \Delta k = \gamma f(k) - \delta k$$

$$= \frac{\gamma f(k) - \delta k}{k}$$

$$= \frac{\gamma f(k)}{k} - \delta$$

Analytisk løsning med Cobb-Douglas (se appendikset)

Endringen i kapitalbeholdningen over tid når vi bruker Cobb-Douglas-funksjonen $f(k) = Ak^{\alpha}$:

$$\Delta k = \gamma A k^{\alpha} - \delta k \tag{3.2}$$

Stasjonærtilstanden med Cobb-Douglas-funksjonen:

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma A k^{\alpha} - \delta k \\ \gamma A k^{\alpha} &= \delta k \end{aligned}$$

Uttrykk for k^{ss} ved bruk av Cobb-Douglas

Vi setter $k = k^{ss}$ i uttrykket for stasjonærtilstanden:

$$\gamma A (k^{ss})^{\alpha} = \delta (k^{ss}) \qquad \text{vi deler så på } (k^{ss})^{\alpha}$$

$$\gamma A = \delta (k^{ss})^{1-\alpha} \qquad \text{vi deler så på } \delta$$

$$(k^{ss})^{1-\alpha} = \frac{\gamma A}{\delta} \qquad \text{og så opphøyer vi med } 1/(1-\alpha)$$

$$k^{ss} = \left(\frac{\gamma A}{\delta}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

Uttrykk for y^{ss} ved bruk av Cobb-Douglas

Vi setter uttrykket for k^{ss} inn i Cobb-Douglas-produksjonsfunksjonen $y = Ak^{\alpha}$:

$$y^{ss} = A(k^{ss})^{\alpha} \qquad \text{hvor } k^{ss} = \left(\frac{\gamma A}{\delta}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

$$y^{ss} = A^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} \tag{3.3}$$

(Vi ser at $\gamma\uparrow \implies y^{ss}\uparrow$ og at $\delta\uparrow \implies y^{ss}\downarrow$)

Hvor raskt nærmer økonomien seg stasjonærtilstanden?

Kapitalens vekstrate med bruk av Cobb-Douglas:

$$\frac{\Delta k}{k} = \gamma A k^{\alpha - 1} - \delta$$

Kapitalens vekstrate $= 0$ hvis $\gamma A (k^{ss})^{\alpha - 1} = \delta$

Se Figur 3.10 i Weil-boka.

Hvor raskt nærmer økonomien seg stasjonærtilstanden?

Se Figur 3.10 i Weil-boka.

Til **venstre** for $\gamma Ak^{\alpha-1} = \delta$ i figuren: kapitalens vekstrate > 0

Til **høyre** for $\gamma Ak^{\alpha-1} = \delta$ i figuren: kapitalens vekstrate < 0

Kapitalens vekstrate er proporsjonal med avstanden mellom kurven som representerer $\gamma A(k^{ss})^{\alpha-1}$ og linjen som representerer δ.

Prediksjoner fra Solow-modellen

Tenk på to land, i og j, som kun har forskjellig investeringsrate (γ_i for land i og γ_j for land j).

De to landene har altså samme produktivitetsnivå (A) og samme depresieringsrate (δ). Begge land antas å befinne seg i stasjonærtilstanden. Antar at α tar samme verdi for begge land.

$$y_i^{ss} = A^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{\gamma_i}{\delta} \right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

$$y_j^{ss} = A^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{\gamma_j}{\delta} \right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

$$\frac{y_i^{ss}}{y_j^{ss}} = \left(\frac{\gamma_i}{\gamma_j} \right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

Prediksjoner fra Solow-modellen

Fra forrige side:

$$\frac{y_i^{ss}}{y_j^{ss}} = \left(\frac{\gamma_i}{\gamma_j}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

Vi antar nå at investeringsraten for land i er 27% og at investeringsraten for land j er 3%. Vi antar at $\alpha = 1/3$, og får dermed at $\alpha/(1-\alpha) = 1/2$.

$$\frac{y_i^{ss}}{y_j^{ss}} = \left(\frac{0.27}{0.03}\right)^{1/2} = 9^{1/2} = 3$$

Gitt antakelsene vi har gjort, så predikerer Solow-modellen at inntekten vil være tre ganger høyere i landet med en investeringsrate på 27% (sammenlignet med 3%).

Teori versus data: empirisk testing av Solow-modellen

Se Figur 3.7 i Weil-boka. Det gjøres samme type antagelser, nå testet ut ved hjelp av data på lands gjennomsnittlige investeringsrate over perioden 1970–2005.

(antar at hhv produktivitet og depresieringsrate er lik på tvers av land, $\alpha = 1/3$ i alle land, og at alle land er i 'steady state')

Perfekt modell? Da ville vi forvente at datapunktene lå langs 45-grader linjen.

Ingen forklaringskraft? Da ville vi forvente at det ikke var noe synlig mønster for datapunktene.

Prediksjoner fra Solow-modellen

Tre prediksjoner fra Solow-modellen:

(1) Hvis to land har samme investeringsrate, men forskjellige inntektsnivå, så vil landet med lavest inntekt ha høyest vekst.

(2) Hvis to land har samme inntektsnivå, men forskjellige investeringsrater, så vil landet med høyest investeringsrate ha høyest vekst.

(3) Et land som øker investeringsnivået sitt vil oppleve en økning i inntektsveksten.

Gitt at det ikke er noen andre forskjeller mellom de to landene.

Investering: sammenligning mellom land

Se Figur 3.8 i Weil-boka (basert på data fra 142 land)

Vi har sett bort fra investering i utlandet (lukket økonomi):
landets investering = landets sparing

(I kapittel 11 av Weil ser vi på en åpen økonomi.)

Kan inntektsnivået påvirke sparerate̲n?

Hvilke implikasjoner ville en endogen sparerate hatt for Solow-modellen?

Anta at det finnes to sparerater, en lav sparerate (s_1) og en høy sparerate (s_2) og at følgende gjelder:

$$\begin{aligned} \gamma &= s_1 \text{ hvis } y < y^\star \\ &= s_2 \text{ hvis } y \geq y^\star \end{aligned}$$

Se Figur 3.9 i Weil-boka, hvor vi benytter oss av ligningen,

$$\Delta k = \gamma f(k) - \delta k \tag{3.1}$$

Multiple likevekter

Se Figur 3.9 i Weil-boka: Linjen som representerer $\gamma f(k)$ gjør nå et hopp når $y = y^{\star}$. Det finnes to mulige stasjonærtilstander.

'Fattigdomsfelle'; s er lav fordi y er lav, y er lav fordi s er lav.

Økonomer har en aktiv debatt om hvorvidt multiple stasjonærtilstander kan forklare inntektsforskjeller, hvor spareraten bestemmes av inntektsnivået som igjen bestemmer spareraten.

Kontinuerlig tid: "prikk-notasjon"

Hvis vi betrakter tiden som en kontinuerlig variabel, bruker vi "prikk-notasjon" (den deriverte mhp tid).

$$dk/dt = \dot{k}$$

Denne notasjonen brukes i endel andre lærebøker, hvor vekstraten til k da er gitt ved,

$$\hat{k} = \frac{\dot{k}}{k}$$

Dere må kjenne begge typer notasjon og derivasjon.

Har du spørsmål knyttet til forelesningen?

Jeg har treffetid fredager kl.14:15-16:15.
Kontor i 10.etasje i SV-bygningen: kontor 1029.

Spm kan også sendes på mail, men jeg kan komme til å avtale et møte i stedet: ingrid.krueger@econ.uio.no