Forelesning 9

Kapittel 2.6-3.1 og Appendix A, Bævre og Vislie (2007): Næringsstruktur, internasjonal handel og vekst

Egenskaper ved betingete etterspørselsfunksjoner

Homogenitet

Kostnadsfunksjonen er homogen av grad 1 i faktorprisene, da må den deriverte være homogen av grad 0 (Euler's setning).

Euler:

$F(tK,tL) = tF(K,L)$

Derivering på begge sider mhp K gir

$$\frac{\partial F(tK,tL)}{\partial (tK)}\frac{\partial (tK)}{\partial K} = \frac{\partial F(tK,tL)}{\partial (tK)} t = t\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial F(tK,tL)}{\partial (tK)} = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K}$$

De førstederiverte er homogene av grad 0 i faktorene

Starter med den deriverte:

$$\frac{\partial C_i(w,q,Y_i^o)}{\partial w}$$

t-dobling av faktorprisene gir ingen endring i faktoretterspørselen (husk produksjonen er gitt)

$$\frac{\partial C_i(tw,tq,Y_i^o)}{\partial (tw)} = \frac{\partial C_i(w,q,Y_i^o)}{\partial w}$$

Men da vi har

$$\frac{\partial C(w,q,Y_i^o)}{\partial w} = L(w,q,Y^o) \ , \ \frac{\partial C(w,q,Y^o)}{\partial q} = K(w,q,Y^o)$$

så må også de betingete faktoretterspørselsfunksjoner, $L(w,q,Y_i^o)$,$K(w,q,Y_i^o)$, være homogene av grad null i faktorprisene. Dette så vi direkte ved å se på betingelsen avledet fra førsteordensbetingelsene i kostnadsminimeringsproblemet

$$\frac{w}{q} = \frac{F_{L_i}^i(L_i,K_i)}{F_{K_i}^i(L_i,K_i)}$$, faktorprisforholdet lik MSB

En proporsjonal endring i faktorpriser vil ikke påvirke de optimale løsninger for faktoretterspørsel.

For å få fram poenget med at det bare er relative priser som betyr noe for etterspørselen kan vi multiplisere prisene i etterspørselsfunksjonen for arbeidskraft med $t = w/q$

$$L(w,q,Y_i^o) = L(\frac{w}{q},1,Y_i^o) = \tilde{L}(\frac{w}{q},Y_i^o)$$

Samme for betinget faktoretterspørselsfunksjon for kapital

Virkning på etterspørsel av en endring i faktorpris

$$\frac{\partial^2 C_i(w,q,Y_i^o)}{\partial w^2} = \frac{\partial L(w,q,Y_i^o)}{\partial w} < 0$$

Dette følger av at kostnadsfunksjonen er konkav i faktorprisene, synkende marginalkostnad i en pris, og avhenger av at det er substitusjonsmuligheter mellom faktorene. Når lønna går opp vil produsenten substituere seg bort fra arbeidskraft og bruke mer kapital for å produsere samme mengde.

Uten substitusjonsmuligheter, for eksempel ved en limitasjonslov $Y = \mathrm{Min}[\alpha L, \beta K]$ så blir endring i faktoretterspørsel lik null.

Tegning inn her

Virkninger av etterspørsel etter L av en endring i prisen q

$$\frac{\partial^2 C(w,q,Y)}{\partial w \partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial C(w,q,Y)}{\partial w} = \frac{\partial L(w,q,Y)}{\partial q}$$

Men hvordan er det med fortegnet her?

Kan bestemme fortegnet ved å derivere mhp t på begge sider av likningen

$$\frac{\partial C(tw,tq,Y)}{\partial (tw)} = \frac{\partial C(w,q,Y)}{\partial w} \text{ (homogenitet av grad 0 i w,q)}$$

Dette gir:

$$\frac{\partial^2 C(tw,tq,Y)}{\partial (tw)^2}\frac{\partial (tw)}{\partial t} + \frac{\partial^2 C(tw,tq,Y)}{\partial (tw)\partial (tq)}\frac{\partial (tq)}{\partial t} =$$

$$\frac{\partial^2 C(tw,tq,Y)}{\partial (tw)^2} w + \frac{\partial^2 C(tw,tq,Y)}{\partial (tw)\partial (tq)} q =$$

$$(-1)\frac{\partial^2 C(w,q,Y)}{\partial w^2} w + (-1)\frac{\partial^2 C(w,q,Y)}{\partial w \partial q} q = 0$$

Likningen etter likhetstegn nr 2 følger av homogenitet av grad (-1) av de andrederiverte, siste likhet følger av at høyresiden i utgangspunktet over ikke er avhengig av t.

Fra siste likning over får vi:

$$\frac{\partial^2 C(w,q,Y)}{\partial w \partial q} = -\frac{\partial^2 C(w,q,Y)}{\partial w^2}\frac{w}{q} > 0$$

Altså har vi

$$\frac{\partial L(w,q,Y)}{\partial q} > 0$$

Uten substitusjonsmuligheter får vi denne lik null.

Oppsummering av resultater:

Ved substitusjonsmuligheter og indre løsninger på kostmin-problemet har vi

$$\frac{\partial L(w,q,Y_i^o)}{\partial w} < 0\,, \frac{\partial K(w,q,Y^o)}{\partial q} < 0$$

$$\frac{\partial L(w,q,Y_i^o)}{\partial q} > 0\,, \frac{\partial K(w,q,Y^o)}{\partial w} > 0$$

Kostnadsfunksjonen ved konstant skalautbytte

Fra kost-min problemet har vi 1-ordensbetingelsene

$$w = \lambda F_L'(K,L)$$

$$q = \lambda F_K'(K,L)$$

F(.) er homogen av grad 1 i K og L. Da har vi at de deriverte er homogene av grad 0 i K, L. Dette vil si at proporsjonale endringer i K og L ikke endrer grenseproduktivitetene.

Eliminering av Lagrangeparameteren gir oss systemet

$$\frac{w}{q} = \frac{F_L'(K,L)}{F_K'(K,L)}$$

$$Y^o = F(K,L)$$

Den første likningen utrykker at faktorprisforholdet er lik den marginale substitusjonsbrøk, MSB. Denne er homogen av grad 0 i faktorene.

Tegning inn her, isokost og isokvant, fig 4.

En isoklin er en kurve i faktorrommet hvor MSB er konstant. Vi ser at ved en proporsjonal endring i faktorene vil MSB være konstant, altså er en faktorstråle fra origo en isoklin. Men denne isoklinen er substitumalen, eller ekspansjonsveien for konstante faktorpriser for en produktfunksjon som er homogen av grad 1. (legg inn i tegningen)

La Y endres , hvilket forhold skal vi ha mellom faktorene? Jo, for å minimere kostnadene ved produksjonsøkningen så må faktorene endres proporsjonalt da MTSB vil være konstant i henhold til betingelsen ovenfor.

Ved en proporsjonal endring av faktorene ser vi av de opprinnelige førsteordensbetingelser at Lagrangeparameteren ikke vil endre seg da grenseproduktivitetene er homogene av grad 0 i faktorene og faktorene endres proporsjonalt. Men Lagrangeparameteren vil endre seg ved faktorprisendring. Vi kan derfor betrakte denne som en funksjon kun av faktorprisene. Da vi ser på kost-min vil faktorene alltid endres proporsjonalt

$$\lambda = \frac{w}{F_L'} = \frac{q}{F_K'} \Rightarrow \lambda = \lambda(w,q)$$

Vi setter inn for faktorprisene i kostnadsutlegget

$$C = wL + qK = \lambda F_L' L + \lambda F_K' K = \lambda(F_L' L + F_K' K) = \lambda Y$$

Den siste sammenhengen får vi fordi produktfunksjonen er homogen av grad 1 (passuslikningen). Vi kan da skrive

$$C(w,q,Y) = \lambda(w,q)Y = c(w,q)Y$$

Kostnadsfunksjonen utledet fra en produktfunksjon som er homogen av grad 1 kan dekomponeres multiplikativt i et ledd som er en funksjon av faktorprisene og produktmengden.

Gjennomsnittskostnaden blir en funksjon bare av faktorprisene

$$\frac{C(w,q,Y)}{Y} = \overline{C} = \lambda(w,q) = c(w,q)$$

Gjennomsnittskostnaden er lik grensekostnaden

$$\frac{\partial C(w,q,Y)}{\partial Y} = \lambda(w,q) = \overline{C}$$

Bruk av Shephard’s lemma til å finne de betingete faktoretterspørselsfunksjoner når produktfunksjonen har konstant skalautbytte

$$\frac{\partial C(w,q,Y)}{\partial w} = L(w,q,Y) = \frac{\partial}{\partial w}\lambda(w,q)Y = \ell(w,q)Y = \tilde{\ell}(\frac{w}{q})Y$$
$$\frac{\partial C(w,q,Y)}{\partial q} = K(w,q,Y) = \frac{\partial}{\partial q}\lambda(w,q)Y = k(w,q)Y = \tilde{k}(\frac{w}{q})Y$$

Oppsummering av resultater

$$F(tK,tL) = tF(K,L)$$
$$C(w,q,Y) = c(w,q)Y$$
$$L(w,q,Y^o) = \ell(w,q)Y \ , K(w,q,Y^o) = k(w,q)Y$$
$$\frac{K}{L} = \phi(\frac{w}{q})$$

Bedriftens produksjon

$$Maks_Y \ \ pY - C(w,q,Y) = pY - c(w,q)Y = Y(p - c(w,q))$$

Hvis p > c(w,q) får vi ingen entydig løsning for Y, hvis p < c(w,q) legges bedriften ned.

Må ha p = c(w,q) i et marked, og kvantum bestemt via andre mekanismer, profitten blir null.

Dualitet

Kostnadsfunksjonen gjør oss i stand til å finne produktfunksjonen, kostnadsfunksjonen inneholder all teknisk informasjon om produktfunksjonen innenfor substitusjonsområdet, dvs området med ikke-negative grenseproduktiviteter.

3. Likevekt i en liten åpen økonomi

Likevektsbetingelser

p = c(w,q) (får ikke endelig produksjon ved p>c’, får null produksjon ved p<c’)

Likevekt i et land med to næringer,

produktmarkedene

$$p_1 = c_1(w,q)$$
$$p_2 = c_2(w,q)$$

Faktormarkedene

$$L_1 + L_2 = L$$
$$K_1 + K_2 = K$$

Problemstilling: finne de endogene variable som funksjoner av de eksogene.

Innsetting av de betingete etterspørselsfunksjoner

$$L_1(w,q,Y) + L_2(w,q,Y) = L$$
$$K_1(w,q,Y) + K_2(w,q,Y) = K$$

Utnytting av konstant skalautbytte, bruk av Shephard's lemma

$$c_{1w}(w,q)Y_1 + c_{2w}(w,q)Y_2 = L$$
$$c_{1q}(w,q)Y_1 + c_{2q}(w,q)Y_2 = K$$

Systemet består av 4 likninger i 4 endogene variable w,q,Y_1,Y_2 og 4 eksogene variable p_1,p_2,L,K

$$p_1 = c_1(w,q)$$
$$p_2 = c_2(w,q)$$
$$c_{1w}(w,q)Y_1 + c_{2w}(w,q)Y_2 = L$$
$$c_{1q}c(w,q)Y_1 + c_{2q}(w,q)Y_2 = K$$

De to første likningene inneholder to endogene variable og to eksogene, kan løse delmodellen og få de endogene som funksjoner av de eksogene

$$p_1 = c_1(w,q)\,,\ p_2 = c_2(w,q) \Rightarrow$$
$$w = w(p_1, p_2)\ \ ,q = q(p_1, p_2)$$

Går videre med den rekursive strukturen og setter inn for faktorprisene i de to siste likninger

$$c_{1w}(w,q)Y_1 + c_{2w}(w,q)Y_2 = c_{1w}(w(p_1,p_2),q(p_1,p_2))Y_1 + c_{2w}(w(p_1,p_2),q(p_1,p_2))Y_2 = L$$
$$c_{1q}(w,q)Y_1 + c_{2q}(w,q)Y_2 = c_{1q}(w(p_1,p_2),q(p_1,p_2))Y_1 + c_{2q}(w(p_1,p_2),q(p_1,p_2))Y_2 = K$$

Dette er to likninger med to endogene variable Y_1 og Y_2 og 4 eksogene variable p_1,p_2, K, L

$$Y_1 = Y_1(p_1, p_2, L, K)$$
$$Y_2 = Y_2(p_1, p_2, L, K)$$

Vi kan nå i prinsippet finne virkningene på w,q,Y_1, Y_2 av endringer i produktprisene og faktormengdene.