Vekstrater og eksponentiell vekst
ECON 2915 Vekst og næringsstruktur

KÅRE BÆVRE

Høsten 2005

1 Vekstrater og eksponensiell vekst

1.1 Vekstrater i diskret tid

Vekstraten til en størrelse Y angir hvor stor relativ endring denne størrelsen får over tid. I de sammenhengene vi skal se på vil det være hensiktsmessig å la tiden måles i år. Vi bruker symbolet t for å angi tiden målt i år fra et gitt starttidspunkt. Med startår $t = 0$ for kalenderåret 1960 vil $t = 1$ angi kalenderåret 1961 og $t = 45$ kalenderåret 2005.

Typisk vil vi bare ha en observasjon av Y for hvert år. Det er da hensiktsmessig å betrakte t som en variabel som bare antar heltallsverdier (for eksempel $t = 1960, 1961, \ldots$), det vil si at t er en såkalt diskret variabel. Det er vanlig å bruke notasjonen Y_t for å betegne størrelsen Y målt på tidspunkt t.

La g_t betegne vekstraten til Y i året t. Denne er da gitt ved

$$g_t = \frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t}, \tag{1}$$

det vil si som endring i løpet av året t relativt til nivået på Y ved inngangen til året t. Vi omtaler ofte vekstrater i prosent, men i matematisk formulering er det som regel mer hensiktsmessig å måle dem som andeler. (For eksempel angis en vekstrate på 3 % med 0.03). Det er viktig å huske at en vekst*rate* er endringen relativ til nivået. Derfor tilsvarer en vekstrate på 0.03 en endring på 3 enheter når $Y = 100$ og 30 enheter når $Y = 1000$.

1.2 Vekstrater i kontinuerlig tid

I noen sammenhenger er det mer hensiktsmessig å betrakte tiden som en kontinuerlig variabel, det vil si at t er alle reelle tall $t \geq 0$. Det er særlig i teoretiske resonnementer det er mer hensiktmessig å bruke denne tilnærmingen. Konvensjonen er at vi nå bruker notasjonen $Y(t)$ i stedet for Y_t.

Over definerte vi vekstraten over året t. I kontinuerlig tid er det oftest mer interessant å betrakte vekstraten på akkurat tidspunkt t. I stedet for å se på endring i Y mellom tidspunkt t og $t+1$ ser vi heller på den deriverte av $Y(t)$ med hensyn på tiden. Dette er selvsagt som om vi ser på endringen over en uendelig kort (infinitesimal) periode. La $g(t)$ være vekstraten til Y på tidspunkt t. Denne er da gitt ved

$$g(t) = \frac{\frac{dY(t)}{dt}}{Y(t)} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \hat{Y}(t) \tag{2}$$

I tråd med vanlig praksis brukes her notasjonen

$$\dot{Y}(t) \equiv \frac{dY(t)}{dt}$$

det vil si at prikk over en størrelse betyr at vi tar den tidsderiverte av denne størrelsen. Tilsvarende bruker vi

$$\hat{Y}(t) \equiv \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}$$

det vil si at når vi setter en hatt over størrelsen innebærer dette 'oppskriften' (dette kalles en operator): finn den tidsderiverte og del så på nivået. Dette er det samme som å finne vekstraten, så vi kan lese "hatt over noe" som synonymt med vekstraten til det som står under hatten.

Ofte vil vi unnlate å føre opp tiden t eksplisitt og bare skrive Y i stedet for $Y(t)$. Dette for å få en mer kompakt notasjon. På samme måte vil vi skrive bare $\hat{Y}$ og $\dot{Y}$, der vi lar tiden inngå implisitt.

1.3 Konstante vekstrater

1.3.1 Diskret tid

La oss nå anta at vekstraten er konstant lik g over tid, dvs

$$g = \frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t}$$

for alle t. Spesielt har vi

$$g = \frac{Y_1 - Y_0}{Y_0} \Longrightarrow Y_1 = (1+g)Y_0$$

og dermed

$$Y_2 = (1+g)Y_1 = (1+g)^2 Y_0$$

Dette generaliserer seg til

$$Y_t = (1+g)^t Y_0 \tag{3}$$

1.3.2 Kontinuerlig tid

Her har vi altså

$$g = \frac{\frac{dY(t)}{dt}}{Y(t)} \Longrightarrow \frac{dY(t)}{dt} = gY(t)$$

Dette er en såkalt differensialligning (mer presist: en lineær ordinær diff.-ligning av første orden). Det er ofte vanskelig å løse differensialligninger, og det forventes ikke kjennskap til dette temaet. I det spesielle tilfellet vi ser på her er imidlertid løsninga så enkel og viktig at man bør kjenne til den. Denne lyder

$$Y(t) = Y(0)e^{gt} \tag{4}$$

der e er et helt spesielt tall $e = 2.718282..$ som danner basis for eksponentialfunksjonen $f(x) = e^x$. Dette er den inverse funksjonen til den naturlige logaritmen, dvs $\ln(e^x) = x$. Det spesielle med eksponentialfunksjonen er at den er lik sin egen deriverte, det vil si $(e^x)' = e^x$.

Det er alltid lett å sjekke om en løsning på en differensial ligning stemmer. For å gjøre dette trenger vi bare å derivere. I vårt tilfelle har vi (bruk kjerneregelen)

$$\frac{dY(t)}{dt} = Y(0)\frac{d(e^{gt})}{dt} = Y(0)e^{gt}\frac{d(gt)}{dt} = Y(0)e^{gt}g = Y(t)g$$

som jo stemmer.

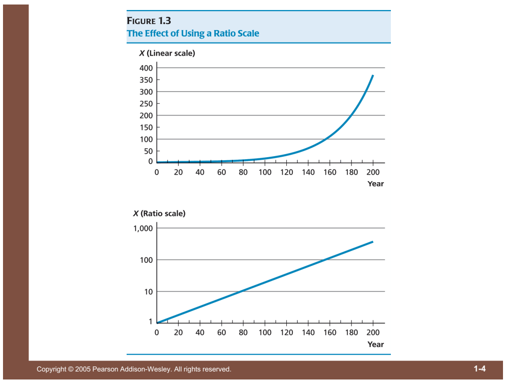
1.3.3 Eksponentiell vekst

Siden Y vokser vil den årlige endringen (antall enheter) bli større og større, selv om den relative endringen (andelen) er konstant. Dette kaller vi eksponentiell vekst. Grafisk ser vekstmønsteret ut som i den øverste grafen i figuren under.

Ved eksponentiell vekst er det ofte mer interessant å se på utviklingen til $\ln(Y(t))$ enn $Y(t)$. Fra (4) følger det at

$$\begin{aligned}
& Y(t) = Y(0)e^{gt} \\
\Rightarrow\quad & \ln(Y(t)) = \ln(Y(0)e^{gt}) \\
\Rightarrow\quad & \ln(Y(t)) = \ln(Y(0)) + \ln(e^{gt}) = \ln(Y(0)) + gt \\
\Rightarrow\quad & g = \frac{1}{t}(\ln(Y(t)) - \ln(Y(0)))
\end{aligned}$$

Dette betyr at vekstraten kan leses av som helningen til kurven dersom vi plotter $\ln(Y(t))$ mot tiden. Videre følger det at en konstant vekstrate fra år til annet vil gi oss en konstant helning på denne kurven, slik som i den nederste grafen i figuren over.



1.4 '70 års regelen'

For å anskueliggjøre hvor rask vekst en vekstrate innebærer, snakker man ofte om vekstratens impliserte fordoblingstid. Det vil si man oversetter vekstraten g til den tiden det tar før størrelsen som vokser med rate g fordobles. Det viser seg at det er en enkel tommelfingerregel som gjør det lett å regne ut denne.

70-regelen sier at hvis noe vokser med g % p.a. vil det fordobles etter $70/g$ år. 10 % vekst gir fordobling i løpet av 7 år. 7 % vekst gir fordobling i løpet av 10 år.

Beviset er rett fram. Fordoblingstiden t_2 er definert ved

$$Y(t_2) = 2Y(0)$$

som innebærer (når vi lar g være målt som rate)

$$\begin{aligned}
& Y(t_2) = Y(0)e^{gt_2} = 2Y(0) \\
\Rightarrow \quad & e^{gt_2} = 2 \\
\Rightarrow \quad & \ln(e^{gt_2}) = \ln(2) \\
\Rightarrow \quad & t_2 = \frac{\ln(2)}{g} \simeq \frac{0,70}{g}
\end{aligned}$$

Merk at mange (blant annet boka til Weil) i stedet ofte snakker om '72 års regelen'. Dette er fordi '70 års regelen' gjelder ved konstant vekst i kontinuerlig tid (som i (4)). Når man tenker på vekst og vekstrater i diskret tid (dvs som i (3) vil ikke dette gjelde like nøyaktig. Her er det vanskelig å finne en eksakt tilnærming slik som vi fant over. Numerisk sett viser det seg imidlertid at estimatene passer bedre når man bytter ut 70 med 72. Det er liten grunn til å være for opptatt av dette skillet. For små vekstrater er ikke forskjellen særlig stor, og i regelen ønsker vi å bruke fordoblingstiden bare for å illustrere størrelsesordenen til vekstrater.

1.5 Regneregler for vekstrater

De følgende tre regnereglene for vekstrater er hendige å kunne.

$$
\begin{aligned}
\widehat{XY} &= \hat{X} + \hat{Y} && (5)\\
\widehat{X/Y} &= \hat{X} - \hat{Y} && (6)\\
\widehat{X^a} &= a\hat{X} && (7)\\
& && (8)
\end{aligned}
$$

Ved bruk av disse reglene kan man lett finne vekstraten til mer sammensatte uttrykk, slik som

$$
\begin{aligned}
\widehat{\frac{K^\alpha L^{1-\alpha}}{AL}} &= \widehat{K^\alpha L^{1-\alpha}} - \widehat{AL} = \widehat{K^\alpha} + \widehat{L^{1-\alpha}} - (\hat{A} + \hat{L})\\
&= \alpha\hat{K} + (1-\alpha)\hat{L} - (\hat{A} + \hat{L})
\end{aligned}
$$

Bevisene for disse tre resultatene er rett fram ved derivasjon og noe manipulasjon av uttrykkene

$$\widehat{XY} = \frac{\frac{d}{dt}(XY)}{XY} = \frac{\dot{X}Y + X\dot{Y}}{XY} = \frac{\dot{X}}{X} + \frac{\dot{Y}}{Y} = \hat{X} + \hat{Y}$$

$$\widehat{X/Y} = \frac{\frac{d}{dt}(X/Y)}{X/Y} = \frac{\frac{\dot{X}Y - X\dot{Y}}{Y^2}}{X/Y} = \frac{\dot{X}Y - X\dot{Y}}{XY} = \frac{\dot{X}}{X} - \frac{\dot{Y}}{Y} = \hat{X} - \hat{Y}$$

$$\widehat{X^a} = \frac{\frac{d}{dt}(X^a)}{X^a} = \frac{aX^{a-1}\dot{X}}{X^a} = \frac{a\dot{X}}{X}\cdot\frac{X^{a-1}}{X^{a-1}} = a\hat{X}$$

En alternativ måte å vise disse reglene på er ved logaritmisk derivasjon. Merk at

$$\frac{d}{dt}(\ln(X)) = \frac{1}{X}\dot{X} = \hat{X}$$

dette betyr at vi kan bruke følgende prosedyre for å finne vekstratene av sammensatte utrykk: 1) finn logaritmen, 2) deriver med hensyn på tiden. For eksempel:

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{K^\alpha L^{1-\alpha}}{AL}\right) &= \alpha\ln(K) + (1-\alpha)\ln(K) - (\ln(A) + \ln(L)\\
\Rightarrow \widehat{\frac{K^\alpha L^{1-\alpha}}{AL}} &= \frac{d}{dt}(\alpha\ln(K) + (1-\alpha)\ln(K) - (\ln(A) + \ln(L))\\
&= \alpha\frac{d}{dt}\ln(K) + (1-\alpha)\frac{d}{dt}\ln(K) - (\frac{d}{dt}\ln(A) + \frac{d}{dt}\ln(L))\\
&= \alpha\hat{K} + (1-\alpha)\hat{L} - (\hat{A} + \hat{L})
\end{aligned}
$$

Med litt trening er denne metoden den enkleste å bruke.

Regnereglene gjelder eksakt for vekstrater i kontinuerlig tid. For vekstrater i diskret tid vil de bare gjelde med tilnærmet riktighet. Presisjonen til denne tilnærmingen blir dårligere desto høyere tallverdien til vekstratene er.