# Utsatt eksamen ECON2915

## Oppgave 1

Betrakt en Solow vekstmodell for en lukket økonomi. Vi har følgende relasjoner:

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \quad (1)$$

$$\dot{K} = \gamma Y - \delta K, \qquad 0 < \gamma < 1, \qquad 0 < \delta < 1 \quad (2)$$

der $Y$ er brutto nasjonalprodukt, $A$ er total faktorproduktivitet, $K$ kapitalbeholdningen, $L$ antall arbeidere, $\gamma$ investeringsraten og $\delta$ depresieringsraten. Anta at befolkningsstørrelse er lik antall arbeidere, og at arbeidsstyrkens vekstrate er gitt ved $n = \frac{\dot{L}}{L}$. En prikk over variabelen indikerer tidsderivert, dvs. $\dot{K} = dK/dt$ og $\dot{L} = dL/dt$.

a) Vis at produktfunksjonen (1) er homogen av grad 1 i $K$ og $L$ og har positivt og avtagende marginalprodukt med hensyn på begge innsatsfaktorer $K$ og $L$.
b) Vis at $\alpha$ uttrykker kapitalens andel av BNP.
c) Definer kapitalintensiteten som $k \equiv K/L$. Definer videre $\dot{k} \equiv \frac{d(K/L)}{dt}$ og $y \equiv Y/L$. Sett modellen på intensivform, dvs. finn uttrykk for $y$ og $\dot{k}$.
d) Stasjonærtilstanden i modellen er karakterisert ved $\dot{k} = 0$. Illustrer i en figur og forklar hvorfor vi kaller dette en stasjonærtilstand. Forutsett at vi starter med en verdi av $k$ som er (i) mindre enn stasjonærverdien til $k$, (ii) større enn stasjonærverdien til $k$. Vis i figuren at $k$ og $y$ beveger seg mot stasjonærtilstanden i begge tilfeller.
e) Finn uttrykkene for stasjonærverdiene til $k$ og $y$.

## Oppgave 2

Betrakt en liten åpen økonomi hvor det er to sektorer, konkurranseutsatt og skjermet sektor. $x_k$ produseres i konkurranseutsatt sektor og handles fritt på det internasjonale markedet til en gitt pris. $x_s$ produseres i skjermet sektor og kan kun konsumeres i hjemmemarkedet. Vi har to innsatsfaktorer i økonomien, arbeid og kapital, som brukes i produksjonen av begge varer. Produksjonen er karakterisert av konstant skalautbytte og positivt og avtagende marginalprodukt med hensyn på begge innsatsfaktorer.

a) Illustrer produksjonsmulighetene i en figur med $x_s$ og $x_k$ på aksene. Begrunn formen på produksjonsmulighetskurven.

Anta at det finnes en representativ konsument med indifferenskurver som krummer mot origo.

b) Illustrer den generelle likevekten.

c) Anta at det skjer en teknologisk fremgang i konkurranseutsatt sektor samtidig som teknologinivået i skjermet sektor er uendret. Vis hvordan produksjon og konsum påvirkes.

## Oppgave 3

a) Forklar hva vi mener med begrepet teknologi. Diskuter kort hvilken betydning teknologisk fremgang har for økonomisk vekst.

b) Betrakt en modell for to land hvor det ene landet (land 1) står for utviklingen av ny teknologi, mens det andre landet (land 2) kopierer teknologien i det første landet. Produksjonsnivå per arbeider i de to landene er gitt ved:

$$y_1 = A_1(1 - \gamma_{A,1}) \tag{1}$$

$$y_2 = A_2(1 - \gamma_{A,2}) \tag{2}$$

hvor $A_1$ og $A_2$ er produktiviteten i henholdsvis land 1 og land 2, $\gamma_{A,1}$ er andelen av arbeidsstyrken i land 1 som er involvert i innovasjon, og $\gamma_{A_2}$ andelen av arbeidsstyrken i land 2 som er involvert i kopiering av teknologi. Vekstraten til produktiviteten i de to landene er gitt ved

$$\hat{A}_1 = \frac{\gamma_{A,1}}{\mu_i} L_1$$
$$\hat{A}_2 = \frac{\gamma_{A,2}}{\mu_c} L_2$$
$$\mu_c = c\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$$

der $\hat{A}_1$ og $\hat{A}_2$ er vekstraten til produktiviteten i henholdsvis land 1 og land 2, $\mu_i$ er innovasjonskostnaden, og $\mu_c$ er kopieringskostnaden. $L_1$ og $L_2$ er antall arbeidere i de to landene, som vi antar er like ($L_1 = L_2 = L$). Vi gjør følgende forutsetninger:

$$A_1 > A_2$$
$$c'\left(\frac{A_1}{A_2}\right) < 0$$
$$\mu_c \to 0 \qquad \text{når} \qquad A_1/A_2 \to \infty$$
$$\mu_c \to \mu_i \qquad \text{når} \qquad A_1/A_2 \to 1$$

Illustrer stasjonærløsningen i modellen, dvs. der $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, og forklar hvorfor dette er en stabil likevekt.

c) Drøft og illustrer hva som skjer i modellen hvis land 1 øker andelen av arbeidsstyrken involvert i innovasjon.

# English version

## Problem 1

Consider a Solow growth model for a closed economy. We have the following relations:

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \tag{3}$$

$$\dot{K} = \gamma Y - \delta K, \qquad 0 < \gamma < 1, \qquad 0 < \delta < 1 \tag{4}$$

where $Y$ is gross domestic product, $A$ is total factor productivity, $K$ is the capital stock, $L$ is the size of the labor force, $\gamma$ is the investment rate and $\delta$ the depreciation rate. AAssume that the population size is equal to the size of the labor force. A dot above a variable indicates a derivative with respect to time, i.e. $\dot{K} = dK/dt$ and $\dot{L} = dL/dt$.

a) Show that the production function (1) is homogeneous of degree 1 in $K$ and $L$, and displays positive and diminishing marginal product with respect to both factors of production $K$ and $L$.

b) Show that $\alpha$ expresses capital's share of GDP.

c) Define the capital intensity as $k \equiv K/L$. Define also $\dot{k} \equiv \frac{d(K/L)}{dt}$ and $y \equiv Y/L$. Write the model on *per worker form*, i.e. find expressions for $y$ and $\dot{k}$.

d) Steady state in the model is characterized by $\dot{k} = 0$. Illustrate in a figure and explain why we call this a steady state. Assume that we start with a value of $k$ that is (i) lower than the steady state value of $k$, (ii) greater than the steady state value of $k$. Show in the figure that $k$ and $y$ move towards the steady state in both cases.

e) Find the expressions for the steady state values of $k$ and $y$.

## Problem 2

Consider a small open economy where there are two sectors, tradeable and non-tradeable sector. $x_k$ is produced in tradeable sector and is traded freely on the international market at a given price. $x_s$ is produced in the non-tradeable sector and can only be consumed in the domestic economy. We have two factors of production in the economy, labor and capital, which are used in the production of both goods. Production is characterized by constant returns to scala and positive and diminishing marginal product with respect to both factors of production.

a) Illustrate the production possibilities in a figure with $x_s$ and $x_k$ on the axes. Explain the shape of the production possibility frontier.

Assume that there is a representative consumer with indifference curves bent towards origo.

b) Illustrate the general equilibrium.

c) Assume that there is technologial progress in the tradeable sector while the technological level in the non-tradeable sector is unchanged. Show how production and consumption are affected.

## Problem 3

a) Explain what we mean by the term *technology*. Discus briefly what impact technologial progress has on economic growth.

b) Consider a model for two countries where one country (country 1) develop new technology, while the other country (country 2) copies the technology from country 1. Production per worker in the two countries is given by:

$$y_1 = A_1(1 - \gamma_{A,1}) \tag{1}$$

$$y_2 = A_2(1 - \gamma_{A,2}) \tag{2}$$

where $A_1$ and $A_2$ are the productivity levels in country 1 and country 2, $\gamma_{A,1}$ is the fraction of the labor force in country 1 involved in innovation, and $\gamma_{A_2}$ is the fraction of the labor force in country involved in copying technology. The productivity growth rates in the two countries are given by:

$$\hat{A}_1 = \frac{\gamma_{A,1}}{\mu_i} L_1$$
$$\hat{A}_2 = \frac{\gamma_{A,2}}{\mu_c} L_2$$
$$\mu_c = c\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$$

where $\hat{A}_1$ and $\hat{A}_2$ are the productivity growth rate in country 1 and 2 respectively, $\mu_i$ is the cost of innovation, and $\mu_c$ is the cost of acquiring new technology via copying. $L_1$ and $L_2$ are the number of workers, which we assume is the same in the two countries ($L_1 = L_2 = L$). We make the following assumptions:

$$A_1 > A_2$$
$$c'\left(\frac{A_1}{A_2}\right) < 0$$
$$\mu_c \to 0 \qquad \text{når} \qquad A_1/A_2 \to \infty$$
$$\mu_c \to \mu_i \qquad \text{når} \qquad A_1/A_2 \to 1$$

Illustrate the steady state in the model, i.e. where $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, and explain why this is a stable equilibrium.

c) Discuss and illustrate what happens in the model if country 1 increases the fraction of the labor force involved in innovation.