Universitetet i Oslo / Økonomisk institutt **Bokmål**

# ECON3120/4120 Matematikk 2

10. desember 2013, 1430–1730.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Alle trykte eller skrevne hjelpemidler samt lommeregnere er tillatt.

Karakterskalaen går fra A (beste karakter) til E for bestått, og F for ikke bestått.

- Alle svar skal begrunnes.
- Du kan benytte all informasjon oppgitt i et tidligere bokstavpunkt (f.eks. "(a)") til å løse et senere (f.eks. "(c)"), uansett om du klarte å besvare det førstnevnte. Et senere bokstavpunkt trenger ikke bygge på svar på eller informasjon oppgitt i et tidligere.

**Oppgave 1** I dette problemet lar du $t$ være en konstant, og ser på det lineære ligningssystemet $\mathbf{A}_t\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mhp. den ukjente vektoren $\mathbf{x}$, der

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} 12-3t & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 12 & 2-t & 2-t \end{pmatrix}, \qquad \text{og} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

(a) Finn $q$ slik at $\mathbf{A}_t$ har determinant lik $q \cdot t(t-6)$.

(b) For hvilke verdier av konstanten $t$ vil ligningssystemet $\mathbf{A}_t\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha (i) entydig løsning, (ii) ingen løsning, (iii) flere løsninger?

**Oppgave 2** La $p > 0$ være en konstant og la $g(x) = (2x+p)e^{-px} + pxe^{-2px}$.

(a) (i) Finn $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ eller vis at den ikke eksisterer.

(ii) Vis at $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

(b) Vis at det finnes en $\hat{x} < 0$ slik at $g(\hat{x}) = 0$.

(c) Finn $\int g(x)\,dx$ og avgjør om $\int_p^\infty g(x)\,dx$ konvergerer.

**Oppgave 3** La $r$ være en positiv konstant. Se på problemet

$$\text{minimer} \quad e^{2y+(1-2r)x-r} - \ln(x+y+r/2) \qquad \text{når} \quad x + 2y = r$$

Skriv ut de tilhørende Lagrange-betingelsene, og vis at de er ekvivalent med

$$2r(x+2r)e^{-2rx} + 1 = 0.$$

(Hint: Eliminer multiplikatoren og deretter $y$.)

**Oppgave 4**

(a) (i) Vis at

$$\int \Big[2t(\ln t - 1) - \ln t\Big] e^{-2t}\, \mathrm{d}t = t(1-\ln t)e^{-2t} + C$$

(ii) Vis at $t \cdot (1 - \ln t)$ er en partikulær løsning av differensialligningen

$$\dot{x}(t) = 2x(t) + 2t(\ln t - 1) - \ln t, \qquad t > 0 \tag{$*$}$$

(b) Finn den allmenne løsningen av differensialligningen $(*)$. (Hint: Bruk del (a).)

(c) En partikulær løsning av $(*)$ går gjennom punktet der $(t, x) = (1, 3)$. Finn ligningen for tangentlinjen i dette punktet.

**Oppgave 5** En eksamensoppgave i ECON5155 i desember 2012, førte til ligningssystemet

$$\begin{aligned} (e^{tu} + e^{-tu})v - u + s &= 0 \\ (e^{tu} - e^{-tu})tv &= 1 \end{aligned}$$

som definerer $u$ og $v$ som kontinuerlig deriverbare funksjoner av $s$ og $t$ rundt det punktet $P$ der $s = -2(e+3)/(e-1)$, $t = 1/4$, $u = 2$ og $v = 4\sqrt{e}/(e-1)$. (Dette skal du ikke vise.)

(a) Differensier ligningssystemet (dvs., regn ut differensialer).

(b) Bruk det differensierte systemet til å finne verdien av $\partial u/\partial s$ i $P$.
(Du *skal* bruke det differensierte systemet, selv om svaret kan finnes på andre måter.)

Universitetet i Oslo / Økonomisk institutt **Nynorsk**

# ECON3120/4120 Matematikk 2

10. desember 2013, 1430–1730.
Oppgåvesettet er på 2 sider.
Alle trykte eller skrivne hjelpemiddel samt lommereknarar er tillatne.
Karakterskalaen går frå A (beste karakter) til E for bestått, og F for ikkje bestått.

- Alle svar skal grunngjevast.
- Du kan nytte all informasjon oppgitt i eit tidlegere bokstavpunkt (t.d. "(a)") til å løyse eit seinare (f.eks. "(c)"), uansett om du klarte å svare på det først nemnde. Eit seinare bokstavpunkt treng ikkje byggje på svar på eller informasjon oppgitt i eit tidlegare.

**Oppgåve 1** I dette problemet lar du $t$ vere ein konstant, og ser på det lineære likningssystemet $\mathbf{A}_t\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mhp. den ukjente vektoren $\mathbf{x}$, der

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} 12-3t & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 12 & 2-t & 2-t \end{pmatrix}, \qquad \text{og} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

(a) Finn $q$ slik at $\mathbf{A}_t$ har determinant lik $q \cdot t(t-6)$.

(b) For kva for verdiar av konstanten $t$ vil likningssystemet $\mathbf{A}_t\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha (i) eintydig løysning, (ii) inga løysning, (iii) fleire løysningar?

**Oppgåve 2** Lat $p > 0$ vere ein konstant and lat $g(x) = (2x+p)e^{-px} + pxe^{-2px}$.

(a) (i) Finn $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ eller vis at ho ikkje eksisterer.

(ii) Vis at $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

(b) Vis at det finst ein $\hat{x} < 0$ slik at $g(\hat{x}) = 0$.

(c) Finn $\int g(x)\,dx$ og avgjer om $\int_p^\infty g(x)\,dx$ konvergerer.

**Oppgåve 3** Lat $r$ vere ein positiv konstant. Sjå på problemet

$$\text{minimer} \quad e^{2y+(1-2r)x-r} - \ln(x + y + r/2) \qquad \text{når} \quad x + 2y = r$$

Skriv ut dei tilhørande Lagrange-vilkåra, og vis at dei er ekvivalent med

$$2r(x + 2r)e^{-2rx} + 1 = 0.$$

(Hint: Eliminer multiplikatoren og deretter $y$.)

**Oppgåve 4**

(a) (i) Vis at

$$\int \Big[2t(\ln t - 1) - \ln t\Big] e^{-2t}\, \mathrm{d}t = t(1 - \ln t)e^{-2t} + C$$

(ii) Vis at $t \cdot (1 - \ln t)$ er ei partikulær løysning av differensialligninga

$$\dot{x}(t) = 2x(t) + 2t(\ln t - 1) - \ln t, \qquad t > 0 \tag{$*$}$$

(b) Finn den allmenne løysninga av differensialligninga $(*)$. (Hint: Bruk del (a).)

(c) Ei partikulær løysning av $(*)$ går gjennom punktet der $(t, x) = (1, 3)$. Finn likninga for tangentlinja i dette punktet.

**Oppgåve 5** Ei eksamensoppgåve i ECON5155 i desember 2012, førte til likningssystemet

$$\begin{aligned}(e^{tu} + e^{-tu})v - u + s &= 0\\ (e^{tu} - e^{-tu})tv &= 1\end{aligned}$$

som definerer $u$ og $v$ som kontinuerleg deriverbare funksjonar av $s$ og $t$ rundt det punktet $P$ der $s = -2(e+3)/(e-1)$, $t = 1/4$, $u = 2$ og $v = 4\sqrt{e}/(e-1)$. (Dette skal du ikkje vise.)

(a) Differensier likningssystemet (dvs., rekn ut differensial).

(b) Bruk det differensierte systemet til å finne verdien av $\partial u/\partial s$ i $P$.
(Du *skal* bruke det differensierte systemet, sjølv om svaret kan finnast på andre vis.)