Universitetet i Oslo / Økonomisk institutt **Bokmål (English version included)**

# ECON3120/4120 Matematikk 2

23. mai 2014, 1430–1730.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Alle trykte eller skrevne hjelpemidler samt lommeregnere er tillatt.

Karakterskalaen går fra A (beste karakter) til E for bestått, og F for ikke bestått.

- Alle svar skal begrunnes.
- Du kan benytte all informasjon oppgitt i et tidligere bokstavpunkt (f.eks. "(a)") til å løse et senere (f.eks. "(c)"), uansett om du klarte å besvare det førstnevnte. Et senere bokstavpunkt trenger ikke bygge på svar på eller informasjon oppgitt i et tidligere.

**Oppgave 1** Definer matrisen $\mathbf{A}$ og for hvert reelle tall $t$ matrisen $\mathbf{M}_t$ ved

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2t & -t & 0 \\ -t & -t & 1 \end{pmatrix}$$

(a) i) Regn ut $\mathbf{S}_t = t\mathbf{A} + \mathbf{M}_t$.

ii) Regn ut $\mathbf{P}_t = \mathbf{A}\mathbf{M}_t$.

iii) For hvilke $t$ har $\mathbf{Q}_t = \mathbf{M}_t\mathbf{A}$ en invers?

(b) Finn en $t$ slik at vektoren

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}_t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

er en løsning av ligningssystemet

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(c) La $t$ være verdien fra del (b).

i) Hvorfor er det slik at vektoren $\mathbf{x} = \mathbf{M}_t\ (a,\ b,\ c)'$ er en løsning av ligningssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = (a,\ b,\ c)'$ uansett hva $a$, $b$ og $c$ er?

ii) Kan det finnes andre løsninger, for noen verdier av $a$, $b$, $c$?

**Oppgave 2**

(a) Regn ut integralet $\displaystyle\int_1^T te^{4t}\,dt.$

(b) Finn den allmenne løsningen av differensialligningen $\dot{x} = 3x^2\,te^{4t}$.

(c) Finn den partikulære løsningen av differensialligningen $\dot{x} = 3x + te^{7t}$, slik at $x(1) = 2$.

**Oppgave 3** Let $f(x, y) = \ln x + xy - y^2 - 2y\sqrt{3}$.

(a) Finn og klassifiser de to stasjonærpunktene til $f$.

(b) Har $f$ noen *globale* ekstrempunkter?

Se på det ikkelineære programeringsproblemet

$$\text{maksimer } f(x, y) \qquad \text{når} \qquad x + y \leq 1, \qquad y \geq 0 \tag{P}$$

(c) Sett opp Kuhn–Tucker-betingelsene, og verifiser at de er tilfredsstilt i punktet $(x, y) = (1, 0)$.

(d) Vis at $(x, y) = (1, 0)$ løser problemet (P).

(e) Omtrent hvor mye vil den optimale verdien reduseres om beskrankningen $y \geq 0$ skjerpes til å kreve $y \geq 1/200$?

**Oppgave 4** Anta at $h(x, y)$ er homogen av grad $k$, og la $H(x, y) = h(x, y) + k$.
Finn alle $k$ slik at $H$ er homogen, og finn alle $k$ slik at $H$ er homotetisk.

# ECON3120/4120 Matematikk 2

23. mai 2014, 1430–1730.

Oppgåvesettet er på 2 sider.

Alle trykte eller skrivne hjelpemiddel samt lommereknarar er tillatne.

Karakterskalaen går frå A (beste karakter) til E for bestått, og F for ikkje bestått.

- Alle svar skal grunngjevast.
- Du kan nytte all informasjon oppgitt i eit tidlegere bokstavpunkt (t.d. "(a)") til å løyse eit seinare (f.eks. "(c)"), uansett om du klarte å svare på det først nemnde. Eit seinare bokstavpunkt treng ikkje byggje på svar på eller informasjon oppgitt i eit tidlegare.

**Oppgåve 1** Definer matrisa $\mathbf{A}$ og for kvart reelle tal $t$ matrisa $\mathbf{M}_t$ ved

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2t & -t & 0 \\ -t & -t & 1 \end{pmatrix}$$

(a) i) Rekn ut $\mathbf{S}_t = t\mathbf{A} + \mathbf{M}_t$.

ii) Rekn ut $\mathbf{P}_t = \mathbf{A}\mathbf{M}_t$.

iii) For kva for $t$ har $\mathbf{Q}_t = \mathbf{M}_t\mathbf{A}$ ei invers?

(b) Finn ein $t$ slik at vektoren

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}_t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

er ein løysning av likningssystemet

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(c) Lat $t$ vere verdien fra del (b).

i) Korfor er det slik at vektoren $\mathbf{x} = \mathbf{M}_t\ (a,\ b,\ c)'$ er ein løysning av likningssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = (a,\ b,\ c)'$ uansett kva $a$, $b$ og $c$ er?

ii) Kan det finnast andre løysningar, for nokon verdi av $a$, $b$, $c$?

**Oppgåve 2**

(a) Rekn ut integralet $\int_1^T te^{4t}\, dt$.

(b) Finn den allmenne løysninga av differensiallikninga $\dot{x} = 3x^2\, te^{4t}$.

(c) Finn den partikulære løysninga av differensiallikninga $\dot{x} = 3x + te^{7t}$, slik at $x(1) = 2$.

**Oppgåve 3** Let $f(x, y) = \ln x + xy - y^2 - 2y\sqrt{3}$.

(a) Finn og klassifiser dei to stasjonærpunkta til $f$.

(b) Har $f$ nokon *globale* ekstrempunkt?

Sjå på det ikkjelineære programmeringsproblemet

$$\text{maksimer } f(x, y) \qquad \text{når} \qquad x + y \leq 1, \qquad y \geq 0 \tag{P}$$

(c) Sett opp Kuhn–Tucker-vilkåra, og verifiser at dei er tilfredsstilte i punktet $(x, y) = (1, 0)$.

(d) Vis at $(x, y) = (1, 0)$ løyser problemet (P).

(e) Omtrent kor mykje vil den optimale verdien bli redusert om skranken $y \geq 0$ vert skjerpa til å krevje $y \geq 1/200$?

**Oppgåve 4** Anta at $h(x, y)$ er homogen av grad $k$, og lat $H(x, y) = h(x, y) + k$.
Finn alle $k$ slik at $H$ er homogen, og finn alle $k$ slik at $H$ er homotetisk.