Universitetet i Oslo / Økonomisk institutt **(Nynorsk)**

ECON3120/4120 Matematikk 2

8. desember 2014, 1430–1730.

Oppgåvesettet er på 2 sider.

Alle trykte eller skrivne hjelpemiddel samt lommereknarar er tillatne.

Karakterskalaen går frå A (beste karakter) til E for bestått, og F for ikkje bestått.

- Alle svar skal grunngjevast.
- Du kan nytte all informasjon oppgitt i eit tidlegere bokstavpunkt (t.d. "(a)") til å løyse eit seinare (f.eks. "(c)"), uansett om du klarte å svare på det først nemnde. Eit seinare bokstavpunkt treng ikkje byggje på svar på eller informasjon oppgitt i eit tidlegare.

Oppgåve 1 For kvart reelt tal t, sjå på matrisa $\mathbf{A}_t$ og likningssystemet (med (x, y, z) som ukjende) gitt ved:

$$\mathbf{A}_t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{der} \quad \mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 3t & -8 & t-7 \\ -6 & 3t & 2t+3 \end{pmatrix}$$

(a) Finn $r \neq 0$ og $s \neq 0$ slik at determinanten til $\mathbf{A}_t$ er lik $t \cdot (rt + s)$.

(b) Unntatt for to verdiar t_0 og t_1 for t, har likningssystemet ei og berre ei løysing. Finn t_0 og t_1.

(c) Det er uendeleg mange løysingar for nøyaktig *éin* av t_0, t_1.
Løys systemet for den t-verdien. (Ikkje gjer noko med den andre t-en.)
Hint: Frå dei føregåande delane av oppgava, skulle det vere enkelt å sjå kva for t.

Oppgåve 2

(a) Bruk integrasjon ved substitusjon til å vise at $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln|x|}\, dx = \ln\big|\ln|x|\big| + C.$
(Integrasjon ved substitusjon er obligatorisk her. Det gis ikkje uttelling for å derivere høgresida.)

(b) Finn den allmenne løysinga av differensiallikninga

$$\dot{x} = (x \ln x)(1 + \ln t), \qquad t \geq 1,\ x \geq 1 \tag{D}$$

(c) Finn den partikulære løysinga som går gjennom punktet $(t, x) = (1, 1)$.

Oppgåve 3 Lat $f(x,y) = e^{1-x^3-y^4} - 1$.

(a) i) Finn reelle tal p og q slik at funksjonen $M(x,y) = f(x,y) - px - qy$ har stasjonærpunkt i $(x,y) = (1,0)$.

ii) Klassifiser $(x,y) = (1,0)$ som stasjonærpunkt for M. (Dette kan du gjere utan å ha funne p og q.)

Frå nå av, sjå på problemet

$$V = \max\ f(x,y) \qquad \text{når } (x,y) \in S,$$
$$\text{der } S \text{ er gitt ved skrankane} \quad \begin{cases} y \geq 0 \\ 2y \leq x - 1 \\ x \leq 2014 \end{cases} \tag{P}$$

(b) Forklar korfor problemet har ei løysing, og sett opp dei tilhørande Kuhn–Tucker-vilkåra.

(c) Lat (x,y) tilfredsstille Kuhn–Tucker-vilkåra og skrankane gitt i (P). Vis at vi må ha $2y = x - 1$. (*Hint:* Anta for motseiing at $2y \neq x - 1$.)

Punktet $(x,y) = (1,0)$ løyser problemet (P) (dette skal du ikkje vise). Viss vi erstatter skranken « $y \geq 0$ » med « $y \geq -0.02$ », så auker den optimale verdien med ΔV.

(d) Approksimer ΔV ved hjelp av Kuhn–Tucker-vilkåra for (P). (Du er spurt om approksimasjonen, ikkje om den eksakte verdien.)

Oppgåve 4 Definer ein funksjon $H = H(x_1, \ldots, x_n)$ ved

$$H(x_1, \ldots, x_n) = \left[x_1^{2014} + \ldots + x_n^{2014} \right]^{1/2014}$$

Utan å derivere eller elastisitere, finn (for $H \neq 0$)

$$\mathrm{El}_1 H(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \mathrm{El}_n H(x_1, \ldots, x_n)$$

der $\mathrm{El}_i H$ er notasjon for den partielle elastisiteten $\dfrac{x_i}{H} \cdot \dfrac{\partial H}{\partial x_i}$.
(*Hint:* Rekn ut $H(tx_1, \ldots, tx_n)$; kva veit vi om slike funksjonar?)