Universitetet i Oslo / Økonomisk institutt **(Nynorskversjon.)**

ECON3120/4120 Matematikk 2

29. mai 2015, 0900–1200.

Oppgåvesettet er på 2 sider.

Alle trykte eller skrivne hjelpemiddel samt lommereknarar er tillatne.

Karakterskalaen går frå A (beste karakter) til E for bestått, og F for ikkje bestått.

- Alle svar skal grunngjevast.
- Du kan nytte all informasjon oppgitt i ein tidlegare del eller eit tidlegere punkt (f.eks. "(a)" eller "i)") til å løyse eit seinare (t.d. "(c)" eller "ii)"), uansett om du klarte å svare på det først nemnde. Ein seinare del/punkt treng ikkje nytte svar på eller informasjon oppgitt i eit tidlegare.

Oppgåve 1 Definer for kvart reelt tal w matrisa $\mathbf{A}_w$ og vektoren $\mathbf{b}$ ved

$$\mathbf{A}_w = \begin{pmatrix} 1000+w & 1001 & 1002 \\ 1000 & 1000+w & 1000 \\ 1000 & 999 & 998+w \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) i) Rekn ut $\mathbf{A}_2\mathbf{b}$.

ii) Kvifor fylgjer det frå i) at determinanten $|\mathbf{A}_2|$ er lik 0?

(b) Merk at summen av dei tre radane er $(3000+w)$ gongar vektoren $(1,1,1)$. Nytt dette til å vise at i) $|\mathbf{A}_{-3000}| = 0$, og ii) $|\mathbf{A}_0| = 0$.

(c) Finn antal løysingar for kvart av dei fylgjande likningssystema (ingen, ei eller fleire): i) $\mathbf{A}_0\mathbf{x} = \mathbf{0}$; ii) $\mathbf{A}_1\mathbf{x} = \mathbf{1}$; iii) $\mathbf{A}_2\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
(*Hint:* Det kan vere til hjelp å addere to av likningane til den tredje.)

Oppgåve 2 Det følgjande likningssystemet definerer kontinuerleg deriverbare funksjoner $u = u(p,q)$, $v = v(p,q)$ kring punktet der $p = q = 1$, $u = v = 0$:

$$\begin{aligned} e^u + \ln(1+pqv) + uv - q &= 0 \\ e^u - e^{uv} - p &= -1 \end{aligned} \tag{E}$$

(a) Differensier systemet (dvs. rekn ut differensial).

(b) Finn eit generelt uttrykk for $v'_p(p,q)$.

Oppgåve 3

(a) Finn grensene (eller vis at dei ikkje eksisterer), for vilkårlege konstante $p > q \geq 0$. (*Hint for* $p \in (0,1)$*:* Skriv $\frac{1}{t} = \frac{t-1}{t} \cdot \frac{1}{t-1}$.)

$$\text{i)} \quad \lim_{t \to 1} \frac{(\ln t)^{q+1}}{t-1}, \qquad \text{ii)} \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{(t-1)^p}, \qquad \text{iii)} \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{(\ln t^p)^{q+1}}{(t-1)^p}$$

For kvar $x_1 > 0$, lat $x(t)$ vere den løysinga av differensiallikninga

$$\dot{x} = \frac{x^3 - 8}{x^2} \cdot t^8 \ln t \tag{D}$$

som er slik at $x(1) = x_1$. (Likninga er gyldig berre når $t > 0$, $x > 0$.)

(b) Forklar kvifor $\ddot{x}(1) = (x_1 - \dfrac{8}{x_1^2}) \cdot \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{\ln t}{t-1}$, og nytt dette og del (a) til å finne den kvadratiske approksimasjonen til x omkring $t = 1$.
For full score må du vise dette vha. berre denne informasjonen. Om du nytter andre metodar, t.d. del (c) nedanfor, kan du likevel få opp til score tilsvarande ein «C».

(c) Løys (D) for alle verdi av $x_1 > 0$.

Oppgåve 4 Lat $p \neq q$ vere positive heiltal med q odde (dvs. 1, 3, 5, ...). Lat $g(x, y, z) = x^{q+1} + y^{q+1} + z^{q+1} - 1$, og sjå på maks-/min-problemet

$$\text{maks/min} \quad \frac{x^{p+1} + y^{p+1} + z^{p+1}}{p+1} \qquad \text{når } g(x,y,z) = 0 \qquad \text{og} \quad x + y - z = 1 \tag{P}$$

(a)
 i) Minst eitt av maks-/min-problema har ei løysing. Kva for eitt/nokre?
 (*Hint:* Det er kritisk at q er odde slik at t.d. $g(-x, y, z) = g(x, y, z)$.)
 ii) Sett opp dei tilhøyrande Lagrange-vilkåra.

I resten av oppgåva skal vi sjå på eventuelle løysingar på formen $(x, y, z) = (x, x, 2x - 1)$. Set $y = x$, og $z = x + y - 1 = 2x - 1$, slik at den første skranken tar formen $h(x) = 0$, der $h(x) = g(x, x, 2x - 1) = 2x^{q+1} + (2x - 1)^{q+1} - 1$. (Du skal ikkje vise dette.)

(b)
 i) Vis at funksjonen $h(x)$ har eit nullpunkt $x^* > 1/2$.
 ii) Vis at punktet $(x, y, z) = (x^*, x^*, 2x^* - 1)$ tilfredsstiller Lagrange-vilkåra, der $x^* > 1/2$ er nullpunktet fra punkt i).
 - *Om du ikkje klarer dette,* kan du score opp til ein «C» på dette punktet ii) ved å i staden vise at Lagrange-vilkåra er tilfredsstilte i $(0, 0, -1)$.