Eksamen ECON 3120/4120 - Vår 2014

↳ Løsningsforslag

Oppgave 1

a) i) $S_t = tA + M_t = \begin{pmatrix} t & 2t & t \\ 2t & t & 2t \\ t & t & 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2t & -t & 0 \\ -t & -t & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} t & 2t+1 & t-1 \\ 4t & 0 & 2t \\ 0 & 0 & 2t \end{pmatrix}}}$

ii) $P_t = AM_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2t & -t & 0 \\ -t & -t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t-t & 1-2t-t & -1+1 \\ 2t-2t & 2-t-2t & -2+2 \\ 2t-2t & 1-t-2t & -1+2 \end{pmatrix}$

$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3t & 1-3t & 0 \\ 0 & 2-3t & 0 \\ 0 & 1-3t & 1 \end{pmatrix}}}$

iii) $Q_t = M_t A$ har invers når $|Q_t| = |M_t A| \neq 0$.

$|M_t A| = |M_t| \cdot |A| = |A| \cdot |M_t| = |AM_t|$.

$|AM_t| = \begin{vmatrix} 3t & 1-3t & 0 \\ 0 & 2-3t & 0 \\ 0 & 1-3t & 1 \end{vmatrix} = 3t \begin{vmatrix} 2-3t & 0 \\ 1-3t & 1 \end{vmatrix} - (1-3t)\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0$

$= \underline{3t(2-3t)}$ Denne er lik null hvis og bare hvis $t = 0$ eller $t = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{M_t A \text{ har invers for alle } t \text{ der } t \neq 0 \text{ og } t \neq \frac{2}{3}}}$

b) Ønsker at $AM_t \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Dette er ekvivalent med å ønske $AM_t = I_3$,

der $I_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Siden $AM_t = \begin{pmatrix}3t & 1-3t & 0\\0 & 2-3t & 0\\0 & 1-3t & 1\end{pmatrix}$, ser vi at dette holder

hvis og bare hvis $\underline{\underline{t = \frac{1}{3}}}$

c) i) Siden $AM_t = I_3$ for $t = \frac{1}{3}$ følger det at

$AM_t \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ holder for alle a, b, c,

fordi $I_3 \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

ii) $Ax = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ $\quad |A| = \begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&1&2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}2&2\\1&2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}$

$= -4 + 1 = -3 \neq 0$

Siden $|A| \neq 0$ vil $Ax = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ ha unik løsning,

og dermed kan det ikke finnes noen andre løsninger.

Oppgave 2

a) $\int_1^T te^{4t}\,dt = \Big[\frac{1}{4}te^{4t}\Big]_1^T - \int_1^T \frac{1}{4}e^{4t}\,dt$

$= \frac{1}{4}(Te^{4T} - e^4) - \frac{1}{4}\Big|_1^T \frac{1}{4}e^{4t}$

$= \frac{1}{4}(Te^{4T} - e^4) - \frac{1}{16}(e^{4T} - e^4)$

$$= \underline{\underline{\frac{(4T-1)e^{4T} - 3e^4}{16}}}$$

b) $\dot{x} = 3x^2te^{4t} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{x^2}\,dx = \int 3te^{4t}\,dt$

$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \underline{-\frac{1}{x}}\,, \quad 3\int te^{4t}\,dt = 3\left(\frac{1}{4}te^{4t} - \int \frac{1}{4}e^{4t}\,dt\right)$

$= \frac{3}{4}te^{4t} - \frac{3}{16}e^{4t} + C$

$= \underline{\frac{3}{16}e^{4t}(4t-1) + C}$

$\Rightarrow -\frac{1}{x} = \frac{3}{16}e^{4t}(4t-1) + C$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{\frac{3}{16}e^{4t}(1-4t) - C}}}$$

c) $\dot{x} = 3x + te^{7t}$

$\dot{x} - 3x = te^{7t}$ $\qquad$ $\dot{x}e^{-3t} - 3xe^{-3t} = te^{4t}$

$\frac{d}{dt}(xe^{-3t}) = te^{4t} \Rightarrow xe^{-3t} = \int te^{4t}dt = \frac{1}{16}e^{4t}(4t-1) + C$

$$\Rightarrow \underline{x = \frac{1}{16}e^{7t}(4t-1) + Ce^{3t}}$$

$x(1) = 2 \Rightarrow \frac{1}{16}e^{7} \cdot 3 + Ce^{3} = 2$

$$\Rightarrow \underline{C = 2e^{-3} - \frac{3}{16}e^{4}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{16}e^{7t}(4t-1) + 2e^{3(t-1)} - \frac{3}{16}e^{3t+4}}}$$

Oppgave 3

$$f(x,y) = \ln x + xy - y^2 - 2y\sqrt{3}$$

a) $f'_x = \frac{1}{x} + y = 0 \quad (1)$

$f'_y = x - 2y - 2\sqrt{3} = 0 \quad (2)$

(1) gir $\underline{y = -\frac{1}{x}}$

(2) gir da $x + \frac{2}{x} = 2\sqrt{3} \qquad x^2 + 2 = 2\sqrt{3}x$

$\underline{x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0}$

$(x - \sqrt{3})^2 = 1 \qquad x - \sqrt{3} = \pm 1 \qquad x = \sqrt{3} \pm 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = \sqrt{3} + 1}}, \underline{\underline{x_2 = \sqrt{3} - 1}}$ (Å løse på kalkulator også ok)

b) Merk at $f(x,0) = \ln x$, og $\ln x$ kan vi få så stor vi bare vil. Dermed kan ikke f ha globale ekstrempunkter.

<u>f har ingen globale ekstrempunkter</u>

c) maks $f(x,y)$ gitt $x+y \le 1$, $y \ge 0$.

$\mathcal{L}(x,y) = \ln x + xy - y^2 - 2y\sqrt{3} - \lambda(x+y-1) + \mu y$

$$\boxed{\begin{array}{ll}
(1) & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{1}{x} + y - \lambda = 0 \\
(2) & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x - 2y - 2\sqrt{3} - \lambda + \mu = 0 \\
(3) & \lambda \ge 0 \quad (\lambda = 0 \text{ hvis } x+y<1) \\
(4) & \mu \ge 0 \quad (\mu = 0 \text{ hvis } y>0) \\
(5) & x+y \le 1 \\
(6) & y \ge 0
\end{array}}$$

← K-T-betingelsene.

i $(x,y) = (1,0)$ holder (6) pga $0=0$,

og $x+y = 1 \le 1$, så (5) holder.

Videre gir (1) at $\underline{\lambda = 1}$, mens (2) da gir $\underline{\mu = 2\sqrt{3}}$

Dermed er (3) og (4) og tilfredsstilt.

$\Rightarrow$ <u>K-T-betingelsene er tilfredsstilt: $(x,y) = (1,0)$</u>

d) Dersom $\mathcal{L}(x,y)$ er konkav over relevante størrelse (x,y), ~~vet~~ vet vi at $(x,y)=(1,0)$ vil løse problemet.

$$\mathcal{L}''_{xx} = -\frac{1}{x^2} \qquad \mathcal{L}''_{xy} = 1 \qquad \mathcal{L}''_{yy} = -2$$

Vi ser at $\mathcal{L}''_{xx} \leq 0$ for alle tillatte (x,y), og $\mathcal{L}''_{yy} < 0$ for alle (x,y).

$$\mathcal{L}''_{xx}\mathcal{L}''_{yy} - (\mathcal{L}''_{xy})^2 = \left(-\frac{1}{x^2}\right)(-2) - 1 = \frac{2}{x^2} - 1 = \frac{2-x^2}{x^2} \geq 0$$ dersom $x^2 \leq 2$,

dvs $x \leq \sqrt{2}$, hvilket holder for våre tillatte (x,y).

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}(x,y)$ er konkav over relevante (x,y), og dermed løser $(x,y)=(1,0)$ problemet.

e) La V være verdifunksjonen.

Da har vi: $\Delta V \approx \mu \cdot \left(-\frac{1}{200}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{200} = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}}{100}}}$

Oppgave 4

$H(x,y) = h(x,y) + k$

$H(tx,ty) = h(tx,ty) + k = \underline{t^k h(x,y) + k}$

$t^k H(x,y) = \underline{t^k h(x,y) + t^k k}$

Har at $t^k h(x,y) + k = t^k h(x,y) + t^k k$

hvis og bare hvis $\underline{k = 0}$

<u>H er homogen kun for $k = 0$</u>

H er homotetisk dersom $H(x,y) = H(v,w)$ medfører $H(tx,ty) = H(tv,tw)$.

La $H(x,y) = H(v,w)$, dette medfører $h(x,y) + k = h(v,w) + k$,

dvs. $\underline{h(x,y) = h(v,w)}$.

$H(tx,ty) = h(tx,ty) + k = t^k h(x,y) + k = t^k h(v,w) + k$
$= h(tv,tw)$. <u>Dermed følger at H er homotetisk for alle k</u>