EKSAMENSOPPGAVER

I

ECON4120 MATEMATIKK 2

MATEMATISK ANALYSE OG

LINEÆR ALGEBRA

Økonomisk institutt
2003

4120n007 11.8.2003 774

Forord

Denne oppgavesamlingen er særlig beregnet på studenter som forbereder seg til eksamen i ECON4120 Matematikk 2. Oppgavene er hentet, med enkelte redaksjonelle endringer, fra tidligere eksamener i kurs på omtrent samme nivå.

Bak i heftet er det en fasit med stort sett kortfattede svar. Vi takker Li Cen for utmerket hjelp i arbeidet med dette heftet.

Oslo, juli 2003

Arne Strøm og Knut Sydsæter

4120n007 11.8.2003 774

Oppgave 1

La $f(x) = x(x-1)(x-2)$.

(a) Avgjør hvor $f(x) > 0$.

(b) Beregn $f'(x)$. Avgjør hvor funksjonen vokser og hvor den avtar. Finn eventuelle lokale ekstrempunkter og -verdier. Hvor er $f(x)$ strengt konveks?

(c) Skisser grafen. Beregn $\int_0^1 f(x)dx$.

Oppgave 2

(a) Funksjonen g er definert ved $g(x,y) = 3 + x^3 - x^2 - y^2$, og definisjonsområdet D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq 1$ og $x \geq 0$. Skraver D i xy-planet.

(b) Finn mulige stasjonære punkter for funksjonen g, og avgjør arten av disse.

(c) Beregn funksjonens (globale) ekstrempunkter og -verdier.

Oppgave 3

La $D = \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ x & 1 & a \\ y & b & ab \end{vmatrix}$, hvor a og b er positive konstanter og $a > b$. Langs hvilke rette linjer i xy-planet er $D = 0$? Angi de områdene i xy-planet hvor $D > 0$.

Oppgave 4

Den daglige produksjonen i en bedrift er gitt ved $F(L,K) = L^{1/2}K^{1/2}$, hvor L er antall arbeidere og K er investert kapital i bedriften.

(a) Vis at $F(tL, tK) = tF(L,K)$ for alle $t \geq 0$, og at

$$L\frac{\partial F}{\partial L} + K\frac{\partial F}{\partial K} = F(L,K).$$

Hver arbeider har en årslønn på 50 000 kr., og renter av kapitalinvesteringen betales med 8% p.a. Bedriften budsjetterer med 1 million kr. til lønnsutgifter og renteutgifter det aktuelle året.

(b) Finn de verdiene av L og K som gir størst produksjonskapasitet innenfor denne budsjettrammen.

Oppgave 5

(a) Gitt matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix}$ der a, b er vilkårlige konstanter. Finn determinanten til $\mathbf{A}$, og beregn $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2$.

4120n007 11.8.2003 774

(b) En kvadratisk matrise $\mathbf{B}$ kalles *skjevsymmetrisk* dersom $\mathbf{B} = -\mathbf{B}'$, der $\mathbf{B}'$ er den transponerte av $\mathbf{B}$. Vis at om $\mathbf{C}$ er en vilkårlig matrise som er slik at $\mathbf{C}'\mathbf{B}\mathbf{C}$ er definert, da er $\mathbf{C}'\mathbf{B}\mathbf{C}$ skjevsymmetrisk om $\mathbf{B}$ er det.

(c) Når er matrisen $\mathbf{A}$ definert i punkt (a) ovenfor skjevsymmetrisk?

Oppgave 6

En funksjon f er gitt ved formelen $f(x) = (1 + 2/x)\sqrt{x+6}$.

(a) Angi definisjonsområdet for f.

(b) Bestem nullpunktene til f, samt de intervallene der $f(x)$ er positiv.

(c) Finn eventuelle lokale ekstrempunkter for funksjonen.

(d) Undersøk $f(x)$ når $x \to 0^-$, $x \to 0^+$ og $x \to \infty$. Undersøk dessuten $f'(x)$ når $x \to \infty$. Skisser diagrammet for f i store trekk.

Oppgave 7

En bedrift produserer x enheter av et vareslag og y enheter av et annet. Salgsprisene pr. enhet er henholdsvis p og q, som bestemmes av etterspørselsrelasjonene

$$p = a - 2x^2, \quad q = by^{-1/2}$$

Kostnadsfunksjonen kan skrives $\pi(x, y) = cx + dy + e$. Konstantene a, b, c, d og e antas positive.

(a) Bestem de verdiene av x og y som gir bedriftens maksimale nettofortjeneste N.

(b) Finn elastisiteten av N mhp. y. Hvor stor er denne elastisiteten ved maksimal nettofortjeneste?

Oppgave 8

Gitt funksjonen f definert ved

$$f(x, y) = 5xy - x^a y^a - 4 \quad \text{for alle } x > 0,\ y > 0 \qquad (a > 1)$$

(a) Beregn de partielle deriverte av f av 1. og 2. orden.

(b) Finn alle de stasjonære punktene til f og undersøk hva annenderiverttesten sier oss om de stasjonære punktene.

(c) Påvis at hyperblene $xy = k$ (k konstant > 0) er nivåkurver for f. f oppnår sitt maksimum langs en av disse nivåkurvene. Hvilken?

(d) Anta $c > 0$. Finn de betingelsene konstantene a og c må oppfylle for at $h(z) = 5z - z^a - c = 0$ skal ha hhv. ingen, en eller to løsninger i $(0, \infty)$.

(e) La p og q være positive konstanter og løs problemet

$$\text{minimer} \quad px + qy \quad \text{når} \quad 5xy - x^2y^2 = 4, \quad x > 0, \quad y > 0$$

(Ta som gitt at problemet har en løsning.)

Oppgave 9

Anta at likningen

$$\ln x + 2(\ln x)^2 = \frac{1}{2}\ln K + \frac{1}{3}\ln L$$

definerer x som en deriverbar funksjon av K og L.

(a) Finn uttrykk for $\dfrac{\partial x}{\partial K}$, $\dfrac{\partial x}{\partial L}$ og $\dfrac{\partial^2 x}{\partial K \partial L}$.

(b) Vis at $\mathrm{El}_K x + \mathrm{El}_L x = \dfrac{5}{6}\left(\dfrac{1}{1 + 4\ln x}\right)$.

Oppgave 10

La nyttefunksjonen U være definert ved formelen

$$U(x, y) = A\ln(x - a) + B\ln(y - b)$$

der a, b, A og B er positive konstanter, $A + B = 1$.

(a) For hvilke verdier av x og y er U definert?

(b) La p, q og R være positive konstanter. Vis ved å bruke Lagranges metode at skal $x = x^*$, $y = y^*$ løse problemet

$$\operatorname*{maks}_{x,\,y} \big[A\ln(x - a) + B\ln(y - b)\big] \quad \text{når} \quad px + qy = R \qquad (*)$$

da må

$$x^* = a + \frac{A\big(R - (pa + qb)\big)}{p}, \qquad y^* = b + \frac{B\big(R - (pa + qb)\big)}{q} \qquad (**)$$

(c) Hvilke krav må en stille til konstantene for at x^* og y^* gitt i $(**)$ virkelig skal løse problemet $(*)$? Tegn et diagram som viser definisjonsområdet til U og budsjettlinjen $px + qy = R$.

(d) La $U^*(p, q, R) = U(x^*, y^*)$ der x^*, y^* er gitt i $(**)$. Vis at $\partial U^*/\partial R > 0$.

Oppgave 11

I en modell fra økonomisk vekstteori får en behov for å studere funksjonen f definert ved

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \qquad \text{for alle } x > 0$$

(a) Beregn $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ og $f'(x)$.

(b) Sett $g(x) = x^2 e^x - (e^x - 1)^2$. Vis at $g'(x) < 0$ for alle $x > 0$. (Her kan det være gunstig å benytte Taylors formel for e^x.) Vis at $g(x) < 0$ for alle $x > 0$. Benytt dette resultatet til å vise at f er strengt avtagende for $x > 0$.

(c) Skisser grafen til f i grove trekk.

Oppgave 12

Betrakt matrisene $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ \frac{1}{2}p & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}q \\ 0 & p & q \end{pmatrix}$ og $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} p^2 & 2pq & q^2 \\ p^2 & 2pq & q^2 \\ p^2 & 2pq & q^2 \end{pmatrix}$.

(a) Beregn $|\mathbf{T}|$. Anta at $p \cdot q \neq 0$. Finn en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for at $\mathbf{T}^{-1}$ skal eksistere. Har $\mathbf{S}$ invers for noen verdier av p og q?

Anta nå i resten av oppgaven at $p + q = 1$.

(b) La $\mathbf{T}$ og $\mathbf{S}$ være som angitt ovenfor. Vis at $\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}$. Det er lett å vise (det skal ikke gjøres) at $\mathbf{T}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{T} + \frac{1}{2}\mathbf{S}$. Vis at det følger at $\mathbf{T}^3 = \frac{1}{4}\mathbf{T} + \frac{3}{4}\mathbf{S}$.

(c) Bruk resultatene i (b) til å finne en formel som uttrykker $\mathbf{T}^n$ $(n = 2, 3, \dots)$ lineært ved $\mathbf{T}$ og $\mathbf{S}$. Bevis formelen ved induksjon. Hvordan går det med $\mathbf{T}^n$ når $n \to \infty$?

Oppgave 13

La $U(x, y)$ betegne den nytten en person oppnår ved x timer fritid pr. døgn (24 timer) og y enheter pr. døgn av andre goder. Personen får en timelønn w og betaler en gjennomsnittspris p pr. enhet av de andre godene, slik at

$$py = w(24 - x), \tag{1}$$

når vi antar at personen bruker opp hele sin lønn.

(a) Vis at Lagranges metode anvendt på problemet å maksimere $U(x, y)$ under bibetingelsen (1) fører til likningen

$$pU_1'(x, y) = wU_2'(x, y). \tag{2}$$

(b) Anta at likningene (1) og (2) definerer x og y som deriverbare funksjoner av p og w. Vis at med passende krav på $U(x, y)$ er

$$\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{(24 - x)(wU_{22}'' - pU_{12}'') + pU_2'}{p^2U_{11}'' - 2pwU_{12}'' + w^2U_{22}''}.$$

(c) Finn $\dfrac{\partial x}{\partial w}$ når $U(x, y) = \ln x \cdot \ln(8 + y)$, $x = 16$, $y = 8$ og $p = w = 1$.

Oppgave 14

Finn den allmenne løsningen av differensiallikningen

$$t\dot{x} + (2 - t)x = e^{2t}, \qquad t > 0.$$

Bestem den partikulære løsningen som er slik at $x(1) = 0$.

Oppgave 15

I et problem som gjelder optimal utnyttelse av fiskeressurser, får en behov for å studere funksjonen f definert ved

$$f(q) = \frac{2q\hat{z}}{2q - (p - q)^2}$$

der p og $\hat{z}$ er positive konstanter.

(a) For hvilke verdier av q er f definert? Finn $\lim_{q \to \infty} f(q)$ og $\lim_{q \to -\infty} f(q)$.

(b) Beregn $f'(q)$ og påvis at f har to stasjonære punkter. Avgjør karakteren av disse stasjonære punktene ved å studere uttrykket for $f'(q)$.

(c) Skisser grafen til f.

Oppgave 16

La f være definert ved $f(x,y) = (x+y-2)^2 + (x^2+y-2)^2 - 8$ for alle (x,y).

(a) Beregn de partielle deriverte av f av 1. og 2. orden.

(b) Finn de tre stasjonære punktene til f og klassifiser dem. Vis at f har globalt minimum i to av de stasjonære punktene.

(c) La p og q være gitte reelle tall, ikke begge lik 0, og sett $g(t) = f(pt, qt)$. Beregn $g'(t)$ og vis at $g'(t) \to \infty$ når $t \to \infty$.

Oppgave 17

Betrakt matrisene $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -13 & 14 & -15 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Beregn determinanten $|\mathbf{D}|$. Beregn matriseproduktet $\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}$, og vis at for passende valg av a, b og c er $\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}$.

(b) La $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, sett $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$, og la $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$. Vis at det fins nøyaktig én 3×1-matrise $\mathbf{Y}$ slik at $\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{H}$. (Det er ikke nødvendig å regne ut $\mathbf{Y}$.) Vis dernest at $\mathbf{X} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{Y}$ er løsningen av likningen $\mathbf{B} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{H}$.

Oppgave 18

Finn grensen $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x\sqrt{1+x} - x}$.

Oppgave 19

La f være en funksjon av to variabler gitt ved $f(x,y) = \ln(2x+y+2) - 2x - y$.

(a) Finn de partielle deriverte av første og annen orden til f.

(b) Bestem alle de stasjonære punktene til f.

(c) Skisser mengden $S = \{\, (x,y) : x^2+y^2 \le 1,\ x+y \ge 0 \,\}$ i xy-planet, og finn maksimum av funksjonen f over denne mengden.

Oppgave 20

La funksjonen f være definert ved $f(x,y) = \frac{1}{2}e^{-x-y} - e^{-x} - e^{-y}$ for alle $x > 0$, $y > 0$. Beregn Hesse-matrisen til f.

Oppgave 21

Beregn følgende integraler:

(a) $\displaystyle\int \left((2x-1)^2 + e^{2x-2}\right)\, dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x}{x-1}\, dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2}\, dx \right) dy$

4120n007 11.8.2003 774

Oppgave 22

I flere økonomiske modeller studerer en funksjonen U definert ved

$$U(x) = -Ae^{-ax} - Be^{bx}$$

der A, B, a og b er positive konstanter.

(a) Beregn $U'(x)$ og vis at U har (globalt) maksimum for $x^* = \dfrac{1}{a+b} \ln\left(\dfrac{aA}{bB}\right)$.

(b) Hvor er U er konveks/konkav? Skisser grafen til U når $aA > bB$.

(c) Vis at

$$U(x) = -Ae^{-ax^*}e^{-a(x-x^*)} - Be^{bx^*}e^{b(x-x^*)} = -\frac{C}{a}e^{-a(x-x^*)} - \frac{C}{b}e^{b(x-x^*)}$$

for et passende valg av C (x^* som gitt i (a)). Bruk dette til å påvise at grafen til U er symmetrisk om linjen $x = x^*$ hvis $b = a$.

(d) Vis at den kvadratiske approksimasjonen til $U(x)$ rundt x^* er

$$U(x) \approx -C\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - \frac{1}{2}C(a+b)(x-x^*)^2.$$

Oppgave 23

Finn elastisiteten av y mhp. x når y er gitt som funksjon av x ved

$$\ln y - a\ln x - b(\ln x)^2 - c\ln(\ln x) = 0$$

hvor a, b og c er konstanter. For hvilke verdier av x er funksjonen definert?

Oppgave 24

Betrakt funksjonen f definert ved $f(x,y) = e^{-2x-x^2-2y^2}$ for alle (x,y).

(a) Finn eventuelle stasjonære punkter for f og klassifiser dem.

(b) Skisser mengden $S = \left\{ (x,y) : x \geq 0,\ \ y \geq \dfrac{1}{1+x} \right\}$ i xy-planet.

(c) Anta at problemet

$$\text{maksimer} \quad f(x,y) \quad \text{når} \quad (x,y) \in S \tag{2}$$

har en løsning, og finn den.

(d) Prøv å begrunne at problemet i (c) har en løsning. Vil problemet å minimere $f(x,y)$ når $(x,y) \in S$ ha løsning?

Oppgave 25

La $\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & 1 & t \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) For hvilke verdier av t har $\mathbf{A}_t$ en invers? Har $\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{A}_t$ en invers for noen verdi av t? (Her er $\mathbf{I}$ enhetsmatrisen av orden 3.)

(b) Finn en matrise $\mathbf{X}$ slik at $\mathbf{B} + \mathbf{X}\mathbf{A}_1^{-1} = \mathbf{A}_1^{-1}$. ($\mathbf{A}_1$ er matrisen vi får av $\mathbf{A}_t$ når $t = 1$.)

4120n007 11.8.2003 774

Oppgave 26

Betrakt funksjonen f definert ved formelen $f(x) = \frac{1}{3}x^3\sqrt{4-x^2}$.

(a) Bestem definisjonsområdet til f. Beregn $f(x) + f(-x)$ og gi en geometrisk tolkning av resultatet.

(b) Beregn $f'(x)$ og bestem hvor f vokser og hvor den avtar.

(c) Skisser grafen til f.

(d) Forklar hvorfor funksjonen f definert på $[0, \sqrt{3}\,]$ har en invers funksjon g. Beregn $g'(\frac{1}{3}\sqrt{3})$. (*Vink:* $f(1) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.)

Oppgave 27

Beregn $\displaystyle\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x-3}}{x-7}$.

Oppgave 28

Funksjonen g er gitt ved $g(x) = 2x - ae^{-x}(1+x^2)$, der a er en positiv konstant.

(a) Avgjør hvor funksjonen g er konveks.

(b) Undersøk $g(x)$ når $x \to \infty$. Vis at $g(x) = 0$ har nøyaktig en løsning x_0, og at $x_0 > 0$.

(c) Vis at $x_0 < a/2$. (*Vink:* Vis at $g'(x) > 2$ for $x \neq 1$.)

(d) Definer funksjonen f ved $f(x) = ae^{-x} + \ln(1+x^2)$. Vis at punktet x_0 som du fant i (b), er et globalt minimumspunkt for f.

(e) Punktet x_0 definert ved likningen $g(x_0) = 0$ avhenger av a. Finn et uttrykk for dx_0/da.

(f) Beregn $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} \frac{x_0}{a}$.

Oppgave 29

Anta at etterspørselen etter en vare fra en representativ familie avhenger av varens pris p og familiens inntekt r ved

$$E(p,r) = Ap^{-a}r^b \qquad (A,\ a,\ b \text{ positive konstanter}) \tag{$*$}$$

(a) Finn en konstant k slik at

$$p\frac{\partial E(p,r)}{\partial p} + r\frac{\partial E(p,r)}{\partial r} = kE(p,r)$$

Frisch og Haavelmo fant i en studie av etterspørselen etter melk i Norge (1925–1935) en sammenheng som $(*)$ med $a = 1.5$, $b = 2.08$. Verifiser at i dette tilfellet er $k = 0.58$.

(b) Vis at for funksjonen E i $(*)$ gjelder

$$p^2\frac{\partial^2 E(p,r)}{\partial p^2} + 2pr\frac{\partial^2 E(p,r)}{\partial p\partial r} + r^2\frac{\partial^2 E(p,r)}{\partial r^2} = (a-b)(a-b+1)E(p,r)$$

(c) Anta at p og r begge er deriverbare funksjoner av tiden t. Da blir E gitt i $(*)$ en funksjon av bare t. Finn et uttrykk for dE/dt.

Sett $p(t) = p_0(1.06)^t$ og $r(t) = r_0(1.08)^t$, der p_0 er prisen og r_0 er inntekten ved tidspunktet $t = 0$. Vis at i dette tilfellet er $dE/dt = E(p_0, r_0)\,Q^t \ln Q$, der $Q = (1.08)^b/(1.06)^a$.

(d) Finn en betingelse på a og b som sikrer at E vokser med t.

4120n007 11.8.2003 774

Oppgave 30

Betrakt problemet

$$\text{maksimer (minimer)} \quad x^2 + y^2 - 2x + 1 \quad \text{når} \quad \frac{1}{4}x^2 + y^2 = b \tag{$*$}$$

der b er en konstant $> 4/9$. (Bibetingelsen definerer en lukket, begrenset mengde i xy-planet, en ellipse.)

(a) Løs problemet ved å bruke Lagranges metode.

(b) Maksimumsverdien til $x^2 + y^2 - 2x + 1$ i problemet $(*)$ vil være en funksjon $f^*(b)$ av b. Påvis at $df^*(b)/db = \lambda$, der λ er den tilhørende Lagrange-multiplikatoren.

Oppgave 31

(a) Avgjør om følgende funksjoner er homogene, og angi i tilfelle homogenitetsgraden.

(i) $f(x_1, x_2) = 5x_1^4 + 6x_1x_2^3$

(ii) $F(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1+x_2+x_3}$

(iii) $G(K, L, M, N) = K^{a-b} \cdot L^{b-c} \cdot M^{c-d} \cdot N^{d-a}$ $\qquad$ (a, b, c, d hele tall)

(b) Test Eulers setning på funksjonen i (i).

Oppgave 32

La funksjonen f være definert ved formelen $f(x) = \dfrac{xe^{2x}}{x+1}, \quad x \neq -1$.

(a) Beregn $f'(x)$. Har f noen lokale ekstrempunkter?

(b) Undersøk $f(x)$ når $x \to (-1)^+$, $x \to (-1)^-$, $x \to -\infty$ og $x \to \infty$.

(c) Vis at f bare har ett vendepunkt x_0, og at det ligger i $(-1/2, 0)$.

(d) Hvor er f konveks/konkav? Skisser grafen til f.

Oppgave 33

La funksjonen f være definert ved $f(x, y) = -\frac{1}{3}y^3 + 4y^2 - 15y + x^2 - 8x$.

(a) Skraver i xy-planet den mengden A som består av alle (x, y) der $x \geq 0$, $10 \geq y \geq 0$, $x + y \geq 8$.

(b) Finn minimum for $f(x, y)$ over A, idet du tar det som gitt at minimumet fins.

Oppgave 34

Anta at $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ og $\mathbf{E}$ er $n \times n$-matriser der $\mathbf{D}$ og $\mathbf{B} - \mathbf{C}$ har inverser. Løs matriselikningen $\mathbf{A} + \mathbf{BXD} - \mathbf{CXD} = \mathbf{E}$ med hensyn på $n \times n$-matrisen $\mathbf{X}$.

Oppgave 35

En standard makromodell leder til likningssystemet

$$\begin{aligned} M &= lPy + L(r) \\ S(y, r, g) &= I(y, r) \end{aligned} \tag{$*$}$$

Her er M, l og P konstanter og L, S og I er deriverbare funksjoner.

(a) Forklar hvorfor det er rimelig å regne med at systemet $(*)$ i alminnelighet definerer y og r som deriverbare funksjoner av g.

(b) Differensier systemet $(*)$. Finn deretter uttrykk for dy/dg og dr/dg.

4120n007 11.8.2003 774

Oppgave 36

I en studie av befolkningsutviklingen i et land får man behov for å studere funksjonen f definert ved

$$f(x) = x - (\alpha + \beta)e^{-x} + \alpha e^{-2x} + \beta \quad \text{for alle } x$$

der α og β er positive konstanter og $\alpha > \beta$.

(a) Beregn $f'(x)$ og $f''(x)$.

(b) Vis at f har nøyaktig ett vendepunkt $\bar{x}$, og at $\bar{x} > 0$.

(c) Vis at likningen $2\alpha z^2 - (\alpha + \beta)z - 1 = 0$ har nøyaktig én positiv løsning. (Her er z den ukjente.)

(d) Vis at f har nøyaktig ett stasjonært punkt, x_0. (Bruk $z = e^{-x}$ som ny variabel.) Vis at x_0 er et globalt minimumspunkt for f.

(e) Finn en nødvendig og tilstrekkelig betingelse på α og β for at en skal ha $x_0 > 0$.

Oppgave 37

La $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Beregn $|\mathbf{A}|$, $\mathbf{A}^2$ og $\mathbf{A}^3$. Vis at $\mathbf{A}^3 - 2\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} - \mathbf{I} = \mathbf{0}$, der $\mathbf{I}$ er enhetsmatrisen av orden 3.

(b) Vis at $\mathbf{A}$ har en invers $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A} - \mathbf{I})^2$.

Oppgave 38

Betrakt systemet

$$\begin{aligned} u^2 v - u &= x^3 + 2y^3 \\ e^{ux} &= vy \end{aligned}$$

(a) Systemet definerer u og v som deriverbare funksjoner av x og y rundt punktet $P\colon (x, y, u, v) = (0, 1, 2, 1)$. Finn differensialene til u og v uttrykt ved differensialene til x og y i punktet. Hva blir $\partial u/\partial y$ og $\partial v/\partial x$ i P?

(b) Hvis x øker med 0.1 og y avtar med -0.2 ut fra P, hvilke tilnærmede endringer får vi da av u og v?

Oppgave 39

Betrakt funksjonen f definert ved $f(x, y) = \ln(x + y) - x^2 - y^2 + x$ for alle $x > 0$, $y > 0$.

(a) Finn eventuelle stasjonære punkter for f.

(b) Finn eventuelle globale maksimums- og minimumspunkter for f.

Oppgave 40

Beregn følgende integraler:

$$\text{(a)} \int (1 - x^2)^2 \, dx \qquad \text{(b)} \int_{P_N}^{P_L} \left(a - bP^{1-\alpha}\right) dP \quad (\alpha \neq 2)$$

Oppgave 41

Definer $f(x,y)$ for alle (x,y) ved $f(x,y) = e^{x+y} + e^{x-y} - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y$.

(a) Beregn de partielle deriverte av f av 1. og 2. orden.

(b) Vis at f har et (globalt) minimumspunkt.

Oppgave 42

Betrakt matrisen $\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ t & 2 & 1 \\ 4 & t & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Beregn $|\mathbf{A}_t|$ og avgjør for hvilke verdier av t matrisen $\mathbf{A}_t$ har en invers.

(b) Påvis at den inverse av $\mathbf{A}_t$ for $t = 1$ er $\mathbf{A}_1^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) Skriv likningssystemet

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x + 2y + z &= 1 \\ 4x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

som en matriselikning. Bruk resultatet i (b) til å løse likningssystemet.

Oppgave 43

I et produksjonsteoretisk problem avhenger produksjonen X av antall arbeidere N ved $X = Ng\left(\dfrac{\varphi(N)}{N}\right)$, der g og φ er gitte, deriverbare funksjoner. Finn uttrykk for $\dfrac{dX}{dN}$ og $\dfrac{d^2X}{dN^2}$.

Oppgave 44

Betrakt funksjonen f definert ved $f(x,y) = xye^{-x/y}$ for $x > 0$, $y > 0$.

(a) Beregn de partielle deriverte til f av 1. orden.

(b) Beregn $\mathrm{El}_x f(x,y)$ og $\mathrm{El}_y f(x,y)$ ved å bruke regnereglene for elastisiteter. (Kontroller ved å benytte resultatet i (a).)

(c) Begrunn hvorfor f ikke oppnår noe maksimum over sitt definisjonsområde.

(d) Finn de verdiene av x og y som maksimerer $f(x,y)$ når $x + y = c$, $x > 0$, $y > 0$, der c er en positiv konstant. (Du kan gå ut fra at maksimumsverdien fins.)

Oppgave 45

Bestem a og b slik at $\mathbf{A}$ er den inverse til $\mathbf{B}$ når

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ a & 1/4 & b \\ 1/8 & 1/8 & -1/8 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

4120n007 11.8.2003 774

Oppgave 46

La t være et reelt tall og la $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ t & t & t \end{pmatrix}$

(a) Beregn $|\mathbf{A} - \mathbf{I}|$. ($\mathbf{I}$ er enhetsmatrisen av orden 3.)

(b) Sett $t = 1$ og finn en 3-vektor $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ slik at $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$ og $\mathbf{x}_0$ har lengde 1.

(c) Hva blir $\mathbf{A}^n \mathbf{x}_0$ for $n = 1, 2, \ldots$?

Oppgave 47

Gitt funksjonen $f(x) = -x^2 + x + e^{-x}$, definert i $[-3, 3]$.

(a) Regn ut $f'(x)$ og $f''(x)$.

(b) Hvor er f' (ikke f) voksende og hvor er den avtagende?

(c) Har $f'(x) = 0$ løsning(er) i $[-3, 3]$? I tilfelle hvor mange?

(d) Finn maksimum av f over $[-3, 3]$.

Oppgave 48

(a) La $\mathbf{B}$ være en $n \times n$-matrise slik at $(\mathbf{B} - \mathbf{I})^3 = \mathbf{0}$, der $\mathbf{I}$ er identitetsmatrisen av orden n. Vis at matrisen $3\mathbf{I} - 3\mathbf{B} + \mathbf{B}^2$ er den inverse matrisen til $\mathbf{B}$. (*Vink:* Regn først ut $(\mathbf{B} - \mathbf{I})^3$.)

(b) Beregn den inverse matrisen til $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Oppgave 49

(a) La a og b være positive konstanter. Vis at

$$\int x(x^2 + a^2)^b \, dx = \frac{1}{2(b+1)}(x^2 + a^2)^{b+1} + C$$

(b) Beregn det bestemte integralet $\int_0^4 7x\sqrt{x^2 + 9}\, dx$.

Oppgave 50

Betrakt følgende likningssystem:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ kx + 3y - 2z &= 1 \\ 6x + 2ky - 3kz &= 0 \end{aligned}$$

(a) For hvilke verdier av k har systemet entydig løsning?

(b) Har systemet løsninger når $k = 3$?

Oppgave 51

Betrakt problemet

$$\text{maksimer} \quad f(x,y,z) = 4z - x^2 - y^2 - z^2 \quad \text{når} \quad g(x,y,z) = z - xy = 0 \qquad (*)$$

(a) Bruk Lagranges metode til å stille opp nødvendige betingelser for løsning av problemet.

(b) Finn alle tripler (x, y, z) som tilfredsstiller betingelsene i (a).

(c) Punktet $(1, 1, 1)$ er et maksimumspunkt i $(*)$. Finn et tilnærmet uttrykk for endringen i maksimumsverdien av f hvis bibetingelsen $z - xy = 0$ endres til $z - xy = 0.1$.

Oppgave 52

(a) La $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Beregn $\mathbf{AA}'$, $|\mathbf{AA}'|$ og $(\mathbf{AA}')^{-1}$.

(b) Matrisen $(\mathbf{AA}')^{-1}$ i (a) blir symmetrisk. Er dette en tilfeldighet?

(c) La $(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})$, $(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n})$, $\ldots$, $(x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn})$ representere m observasjoner av n størrelser, og definer matrisen $\mathbf{X}$ ved

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

La videre $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$ være $1 \times m$-matrisen bestående av bare ett-tall. Beregn produktet $\dfrac{1}{m}\mathbf{1} \cdot \mathbf{X}$ og gi en tolkning av resultatet.

Oppgave 53

(a) Beregn $\int_0^2 2x^2(2-x)^2\,dx$. Gi en røff kontroll av svaret ved å skissere grafen til $f(x) = 2x^2(2-x)^2$ over $[0, 2]$.

(b) Funksjonen $x = x(t)$ er deriverbar, med $x(0) = 0$ og $\dot{x} = (1 + x^2)t$ for alle t. Vis at $t = 0$ er et (globalt) minimumspunkt for $x(t)$, og vis at funksjonen $x(t)$ er konveks overalt.

(c) Finn elastisiteten av y mhp. x når $x^a y^b = Ae^{x/y^2}$, der a, b og A er konstanter.

Oppgave 54

La f være en funksjon av to variabler, gitt ved

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - xy - x^3 \quad \text{for alle } x \text{ og } y$$

Finn de stasjonære punktene til f og klassifiser dem.

Oppgave 55

La $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{T} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} s & t & 3 \\ 7 & -8 & 3 \\ 1 & t & -3 \end{pmatrix}$, der s og t er reelle tall.

(a) Vis at for passende verdier av s og t er $\mathbf{T} = \mathbf{A}^{-1}$.

(b) Matrisen $\mathbf{X}$ tilfredsstiller likningen $\mathbf{BX} = 2\mathbf{X} + \mathbf{C}$, der

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Bruk resultatet fra (a) til å bestemme $\mathbf{X}$.

(c) $\mathbf{D}$ er en $n \times n$-matrise slik at $\mathbf{D}^2 = 2\mathbf{D} + 3\mathbf{I}_n$. Vis at $\mathbf{D}^3 = a\mathbf{D} + b\mathbf{I}_n$ for passende verdier av a og b. Finn tilsvarende uttrykk for $\mathbf{D}^6$ og $\mathbf{D}^{-1}$ (altså uttrykk av formen $\alpha\mathbf{D} + \beta\mathbf{I}_n$).

Oppgave 56

Likningen

$$y^2 + x^2e^{ay} = A \qquad (a \text{ og } A \text{ er positive konstanter}) \qquad (*)$$

framstiller en kurve i xy-planet.

(a) Finn kurvens skjæringspunkter med koordinataksene.

(b) Finn stigningstallet for tangenten til kurven i et vilkårlig punkt (x, y) på kurven.

(c) La p og q være konstanter som ikke begge er 0, og betrakt problemet

$$\text{maksimer} \quad px + qy \quad \text{når} \quad y^2 + x^2e^{ay} = A \qquad (**)$$

Still opp Lagrange-betingelsene for løsning av $(**)$, og vis at hvis (x, y) løser problemet, så er $2qxe^{ay} = 2py + pa(A - y^2)$.

(d) I hvilket punkt (x, y) på kurven gitt ved $(*)$ oppnår x sin største verdi?

Oppgave 57

Betrakt funksjonen $f(x, y) = y^3 + 3x^2y$.

(a) Bestem homogenitetsgraden til f og bestem en konstant k slik at

$$xf_1'(x, y) + yf_2'(x, y) = kf(x, y) \quad \text{for alle} \quad (x, y)$$

(b) Finn stigningstallet til tangenten til nivåkurven $y^3 + 3x^2y = -13$ i et vilkårlig punkt på kurven, og finn spesielt tangentlikningen i punktet $(2, -1)$.

(c) Undersøk om nivåkurven i (b) er konveks eller konkav rundt punktet $(2, -1)$ ved å beregne y'' i dette punktet.

(d) Vis at ikke noe punkt på nivåkurven i (b) ligger over x-aksen. Finn den minste y-koordinaten til et punkt på kurven.

4120n007 11.8.2003 774

Oppgave 58

(a) Beregn determinanten $\begin{vmatrix} -2 & 4 & -t \\ -3 & 1 & t \\ t-2 & -7 & 4 \end{vmatrix}$.

(b) For hvilke verdier av t har likningssystemet

$$\begin{aligned} -2x + 4y - tz &= t - 4 \\ -3x + y + tz &= 3 - 4t \\ (t-2)x - 7y + 4z &= 23 \end{aligned}$$

entydig bestemt løsning?

(c) Vis at for $t = 8$ vil likningssystemet i punkt (b) ha en løsning med $y = 3$.

(d) La $\mathbf{B}$ være en $n \times n$-matrise som er slik at $\mathbf{B}^2 = 3\mathbf{B}$. Vis at det fins et tall s som er slik at matrisen $\mathbf{I}_n + s\mathbf{B}$ er invers til matrisen $\mathbf{I}_n + \mathbf{B}$. ($\mathbf{I}_n$ er identitetsmatrisen av orden n.)

Oppgave 59

(a) La $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Beregn $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{I}_3 + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2$ og $(\mathbf{I}_3 - \mathbf{A})(\mathbf{I}_3 + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2)$, der $\mathbf{I}_3$ er enhetsmatrisen av orden 3.

(b) Beregn $(\mathbf{I}_3 - \mathbf{A})^{-1}$ ved å benytte resultatene i (a).

(c) La $\mathbf{U}$ være $n \times n$-matrisen der alle elementene er 1. Vis at

$$(\mathbf{I}_n + a\mathbf{U})(\mathbf{I}_n + b\mathbf{U}) = \mathbf{I}_n + (a + b + nab)\mathbf{U}$$

for alle reelle tall a og b, der $\mathbf{I}_n$ er enhetsmatrisen av orden n.

(d) Bruk resultatet i (c) til å finne den inverse av $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Oppgave 60

La $U(x, y)$ være definert for alle $x > 0$, $y > 0$ ved

$$U(x, y) = A\big[\ln(x^\alpha + y^\alpha) - \ln y^\alpha\big] \qquad (A \text{ og } \alpha \text{ er positive konstanter})$$

(a) Beregn $U_1'(x, y)$, $U_2'(x, y)$ og $U_{12}''(x, y)$.

(b) Undersøk om $U(x, y)$ er homogen.

(c) Vi tenker oss at $U(x, y)$ er en nyttefunksjon for et samfunn, der x er det økonomiske aktivitetsnivået og y er mengden av forurensninger. Vi antar også at forurensningsmengden y avhenger av aktivitetsnivået ved likningen

$$y^3 - ax^4 - b = 0 \qquad (a \text{ og } b \text{ positive konstanter}) \qquad (*)$$

Bruk Lagranges metode til å finne det aktivitetsnivået som maksimerer nyttefunksjonen $U(x, y)$ under bibetingelsen $(*)$. (Du kan gå ut fra at maksimum eksisterer.)

Oppgave 61

Likningssystemet

$$\begin{aligned} \ln(x+u) + uv - y^2 e^v + y &= 0 \\ u^2 - x^v &= v \end{aligned}$$

definerer u og v som C^1-funksjoner av x og y rundt punktet $P : (x, y, u, v) = (2, 1, -1, 0)$.

(a) Differensier systemet.

(b) Finn verdiene av de partielle deriverte u'_x, u'_y, v'_x og v'_y i punktet P.

(c) Finn en tilnærmet verdi for $u(1.99,\ 1.02)$.

Oppgave 62

La $\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} 1 & -a & -a \\ -a & 1 & -a \\ -a & -a & 1 \end{pmatrix}$ for alle reelle tall a.

(a) Beregn determinanten $|\mathbf{A}_a|$, og vis at $\mathbf{A}_a$ har en invers når $a \neq -1$ og $a \neq 1/2$.

(b) Vis at den inverse til $\mathbf{A}_a$ (når den eksisterer) er

$$\mathbf{A}_a^{-1} = k \begin{pmatrix} 1-a & a & a \\ a & 1-a & a \\ a & a & 1-a \end{pmatrix}$$

der k er et tall som avhenger av a.

(c) Vis at om $0 < a < 1/2$ og $\mathbf{x}$ er en 3-vektor med bare positive komponenter, da vil $\mathbf{A}_a^{-1}\mathbf{x}$ også være en vektor med bare positive komponenter.

Oppgave 63

(a) Likningen

$$3xe^{xy^2} - 2y = 3x^2 + y^2$$

definerer y som en deriverbar funksjon av x rundt punktet $(x^*, y^*) = (1, 0)$. Finn stigningstallet for grafen i dette punktet ved implisitt derivasjon. Hva er den lineære approksimasjonen til y rundt $x^* = 1$?

(b) I en likevektsmodell studerer en følgende likningssystem:

$$\begin{aligned} pF'(L) - r &= 0 \\ pF(L) - rL - B &= 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

der F er to ganger deriverbar med $F'(L) > 0$ og $F''(L) < 0$. Alle variablene er positive. Betrakt r og B som eksogene og p og L som endogene variabler, slik at p og L er funksjoner av r og B. Finn uttrykk for $\partial p/\partial r$, $\partial p/\partial B$, $\partial L/\partial r$ og $\partial L/\partial B$ ved implisitt differensiering.

(c) Undersøk om en kan si noe om fortegnene til disse partielle deriverte. Vis spesielt at $\partial L/\partial r < 0$.

Oppgave 64

La $f(x, y)$ være definert ved $f(x, y) = \ln(x + y) + y$ for alle (x, y) med $x + y > 0$. Finn maksimum av $f(x, y)$ under bibetingelsen $x^2 + 2xy + 2y^2 = 2$. (Du kan gå ut fra at maksimum eksisterer.)

Oppgave 65

(a) Beregn integralet $\int_1^4 e^{-\sqrt{t}}\, dt$.

(b) La $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{X}$ og $\mathbf{Y}$ være $n \times n$-matriser som tilfredsstiller likningene

$$\begin{aligned} \mathbf{AX} + \mathbf{Y} &= \mathbf{C} \\ \mathbf{X} + 2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y} &= \mathbf{D} \end{aligned}$$

(Vi antar at $\mathbf{A}$ har en invers.) Finn $\mathbf{X}$ og $\mathbf{Y}$ uttrykt ved $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ og $\mathbf{D}$.

Oppgave 66

(a) For hvilke verdier av a har likningssystemet

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 7 + a \\ 3x - y + az &= -3 \\ -x + ay - 4z &= 8 \end{aligned} \qquad (*)$$

(i) nøyaktig én løsning, (ii) mer enn én løsning, (iii) ingen løsninger?

Oppgave 67

(a) Finn elastisiteten til y mhp. x når $y^2 e^{x+1/y} = 3$.

(b) Følgende system av likninger definerer $u = u(x, y)$ og $v = v(x, y)$ som C^1-funksjoner av x og y rundt punktet $P = (x, y, u, v) = (1, 1, 1, 2)$:

$$\begin{aligned} u^\alpha + v^\beta &= 2^\beta x + y^3 \\ u^\alpha v^\beta - v^\beta &= x - y \end{aligned}$$

der α og β er positive konstanter. Differensier systemet. Finn deretter verdiene av $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$ og $\partial v/\partial y$ i punktet P.

(c) Vis at for funksjonen $u(x, y)$ i punkt (b) har vi $u(0.99, 1.01) \approx 1 - \dfrac{2^{1-\beta}}{100\alpha}$.

Oppgave 68

Betrakt funksjonen h gitt ved $h(x) = \dfrac{e^x}{2 + e^{2x}}$ for alle x.

(a) Avgjør hvor h er voksende og hvor den er avtagende. Finn eventuelle maksimums- og minimumspunkter for h.

(b) Hvorfor må h begrenset til $(-\infty, 0)$ ha en invers funksjon? Finn et uttrykk for den inverse funksjonen.

(c) La $f(x) = \dfrac{g(x)}{2 + (g(x))^2}$, der g er en deriverbar funksjon med $g'(x) > 0$ for alle x. Vil f alltid ha et maksimumspunkt?

Oppgave 69

(a) Beregn determinanten til $\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & t \end{pmatrix}$.

(b) Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ x + y - z &= 1 \\ 3x + y - z &= 4 \end{aligned}$$

ved Gauss-eliminasjon.

Oppgave 70

La funksjonen f være gitt ved $f(x,y) = (x^2+y^2)(xy+1)$ for alle x og y.

(a) Beregn de partielle deriverte av f av 1. og 2. orden.

(b) Vis at $(0,0)$, $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$ og $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ er stasjonære punkter for f, og klassifiser dem. Vis at f ikke har andre stasjonære punkter.

(c) Finn maksimum av $f(x,y)$ over mengden $S = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq a^2\}$, der a er en positiv konstant.

Oppgave 71

(a) Skisser kurven $y = \dfrac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$, og finn arealet av det området som er begrenset av denne kurven, x-aksen og linjen $x = 4$.

(b) La a være en positiv konstant. Finn grenseverdien $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{a^x - x^a}{x-a}$.

Oppgave 72

(a) La $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 4 \\ 2 & 1 & a^2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Beregn $|\mathbf{A}|$.

(b) For hvilke verdier av a har likningssystemet

$$\begin{aligned} ax + y + 4z &= 2 \\ 2x + y + a^2 z &= 2 \\ x - 3z &= a \end{aligned} \tag{$*$}$$

henholdsvis én, ingen eller uendelig mange løsninger? (Løsningene skal ikke finnes.)

(c) Erstatt høyresidene 2, 2 og a i $(*)$ med b_1, b_2 og b_3. Finn en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for at det nye likningssystemet skal ha uendelig mange løsninger.

(d) En 3×3-matrise $\mathbf{B}$ tilfredsstiller likningen $\mathbf{B}^3 = -\mathbf{B}$. Vis at $\mathbf{B}$ ikke kan ha en invers.

Oppgave 73

Finn maksimum av $x^2+y^2+z^2$ når $\begin{cases} x^2+y^2+4z^2 = 1 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$

Oppgave 74

En bedrift produserer og selger en vare. Kostnadene ved å produsere og selge x enheter og bruke y kroner på reklame, er $C = cx + y + d$. Etterspørselen er gitt ved

$$x = -ap + b + R(y)$$

der p er prisen som oppnås per enhet. Vi forutsetter at $R(0) = 0$, $R'(y) > 0$ og $R''(y) < 0$. Konstantene a, b, c og d er alle positive.

(a) Vis at profitten $\pi(x, y)$ ved å selge x enheter og bruke y kroner på reklame, er gitt ved

$$\pi(x, y) = -\frac{1}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{1}{a}R(y)x - cx - y - d$$

(b) Vis at skal $x^* > 0$ og $y^* > 0$ maksimere profitten, må y^* tilfredsstille likningen

$$(b - ac)R'(y^*) + R(y^*)R'(y^*) = 2a \qquad (*)$$

(c) Likning $(*)$ definerer y^* implisitt som funksjon av a, b og c. Beregn $\partial y^*/\partial b$ ved implisitt derivasjon.

(d) Sett $R(y) = \alpha y^{1/2}$, der $\alpha > 0$. Finn eksplisitte uttrykk for y^* og x^* i dette tilfellet.

Oppgave 75

En bedrift har monopol på salg av en bestemt type støvsugere og kan regne med etterspørselsfunksjonen $p = a - bx$, der p er prisen per støvsuger og x er antall solgte støvsugere per år. Bedriften har faste utgifter på r per støvsuger for å dekke råvarekostnader, og har årlige driftsomkostninger d til administrasjon, vedlikehold av bygninger og absolutt nødvendig maskinelt utstyr.

Bedriften ønsker å automatisere produksjonen i den utstrekning det er lønnsomt. Investeringer i spesialmaskiner til dette formål er y. Vi tenker oss at de resterende driftsutgiftene avhenger av y ved at ky er årlige driftsomkostninger til avskrivning og vedlikehold av spesialmaskinene, og $f(y)$ er arbeidslønn per produsert støvsuger. Her er f en gitt C^2-funksjon med $f'(y) < 0$ og $f''(y) > 0$.

Konstantene a, b, r, d og k er alle positive.

(a) Kommenter fortegnene til $f'(y)$ og $f''(y)$. Finn bedriftens årlige nettoutbytte $\pi(x, y)$ og beregn de partielle deriverte av $\pi(x, y)$ av første og annen orden.

(b) Vis at skal $x > 0$, $y > 0$ maksimere nettoutbyttet, så må y tilfredsstille likningen

$$2bk + f'(y)(a - r) = f(y)f'(y) \qquad (*)$$

(c) Anta at $f(y) = \alpha/(y + \beta)$, med $\alpha > 0$ og $\beta > 0$. Vis at $(*)$ da reduserer seg til en tredjegradslikning i $y + \beta$.

(d) Likning $(*)$ i (b) definerer y implisitt som funksjon av k. Finn et uttrykk for dy/dk.

(e) Anta at de tilstrekkelige annenordensbetingelsene for lokalt maksimum av $\pi(x, y)$ er oppfylt. Vis at da er $dy/dk < 0$. (Du får også bruk for førsteordensbetingelsene.)

Oppgave 76

La $\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$.

(a) Beregn $|\mathbf{A}_t|$ og vis at $\mathbf{A}_t^{-1}$ eksisterer for hver t.

(b) Vis at for en bestemt verdi av t er $\mathbf{A}_t^3 = \mathbf{I}_3$, der $\mathbf{I}_3$ er enhetsmatrisen av orden 3, og finn så den inverse til $\mathbf{A}_1$.

(c) Anta at $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ er invertible $n \times n$-matriser. Vis at om $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$, da er $(\mathbf{A}'\mathbf{B}\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$.

Oppgave 77

Beregn integralene: (i) $\displaystyle\int_{-1}^{6} x(2+x)^{1/3}\,dx$ (ii) $\displaystyle\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

Oppgave 78

Løs problemet

$$\text{minimer} \quad Ax + e^{ax} + e^{by} \quad \text{når} \quad e^{ax} + e^{ax+by} = c$$

der A, a, b og c er positive konstanter.

Oppgave 79

Likningssystemet

$$e^{x-y}\ln(x+z-1) = \sqrt{xy}$$
$$x^2y^3z = e$$

definerer y og z som deriverbare funksjoner av x i en omegn om punktet $(x, y, z) = (1, 1, e)$.

(a) Finn elastisitetene til y og z mhp. x i det angitte punktet.

(b) Hva er de tilnærmede prosentvise endringene av y og z dersom x økes fra 1 til 1.1?

Oppgave 80

La funksjonen g være definert ved

$$g(x) = (a-1)x + c^a x^{1-a} - a \quad \text{for} \quad x > 0$$

Her er a og c konstanter med $a > 1$ og $0 < c < 1$.

(a) Beregn $g'(x)$ og $g''(x)$, og undersøk hvordan det går med $g(x)$ når $x \to 0^+$ og når $x \to \infty$.

(b) Vis at g har et globalt minimumspunkt, og finn minimumsverdien.

(c) Vis at funksjonen g har nøyaktig to nullpunkter, og at det ene nullpunktet ligger i intervallet $(0, c)$ og det andre i intervallet $(1, \dfrac{a}{a-1})$.

Oppgave 81

Beregn integralene $\displaystyle\int \frac{dv}{1-v^2}$ og $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{-x}}}$

(*Vink:* $\dfrac{2}{1-v^2} = \dfrac{1}{1+v} + \dfrac{1}{1-v}$.)

4120n007 11.8.2003 774

Oppgave 82

La $\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & 3 \end{pmatrix}$, der a er en konstant.

(a) Beregn determinanten $|\mathbf{A}_a|$ og matrisen $\mathbf{A}_a^2$.

(b) Finn en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for at likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 + ax_3 &= 1 \\ ax_1 + 2x_2 + ax_3 &= 2 \\ ax_1 + ax_2 + 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

skal ha entydig løsning. Finn løsningen når $a = 3$.

(c) Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + nx_2 + \cdots + \qquad\quad nx_{n-1} + nx_n &= 1 \\ nx_1 + 2x_2 + \cdots + \qquad\quad nx_{n-1} + nx_n &= 2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n-1)x_{n-1} + nx_n &= n-1 \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + \qquad\quad nx_{n-1} + nx_n &= n \end{aligned}$$

der n er et helt tall > 1.

(d) Vis at hvis $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$ er $n \times n$-matriser slik at $\mathbf{BAC} = \mathbf{I}_n$, så har $\mathbf{A}$ en invers, og finn et uttrykk for $\mathbf{A}^{-1}$.

Oppgave 83

Betrakt problemet

$$\text{maksimer} \quad U(x_1, x_2, x_3) \quad \text{når} \quad p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = m$$

der $U(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1 - 6) + 2\ln(x_2 - 5) + \ln(x_3 - 4)$, og p_1, p_2, p_3 og m er positive konstanter.

(a) Løs problemet ved å bruke Lagranges metode. (Du kan gå ut fra at problemet har en løsning.)

(b) La U^* være optimalverdifunksjonen for problemet, det vil si at $U^* = U^*(p_1, p_2, p_3, m)$ er maksimumsverdien av $U(x_1, x_2, x_3)$ som funksjon av p_1, p_2, p_3 og m. Påvis ved direkte utregning at $\partial U^*/\partial m = \lambda$, der λ er Lagrange-multiplikatoren fra (a).

(c) Sett $p_1 = 5$, $p_2 = 2$, $p_3 = 5$ og $m = 100$. Estimer endringen i verdien av U^* i dette tilfellet om $m = 100$ endres til $m = 101$.

Oppgave 84

I en vekstmodell er produksjonen Q en funksjon av kapitalen K og arbeidsinnsatsen L. Anta at

(i) $\dot{K} = \gamma Q$ (investeringen er proporsjonal med produksjonen)

(ii) $Q = K^\alpha L$

(iii) $\dot{L} = \beta$ (vekstraten for L med hensyn på t er konstant)

Her er γ, α og β positive konstanter, $\alpha < 1$.

(a) Utled en differensiallikning til bestemmelse av K.

(b) Løs denne likningen når $K(0) = K_0$ og $L(0) = L_0$.

4120n007 11.8.2003 774

Oppgave 85

Finn eventuelle lokale og globale ekstrempunkter for $f(x) = e^{x^2} + e^{2-x^2}$.

Oppgave 86

La $f(x, y, z) = x^2 + x + y^2 + z^2$.

(a) Finn maksimum og minimum av $f(x, y, z)$ når $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 16$.

(b) Finn maksimum og minimum av $f(x, y, z)$ over mengden

$$S = \{\, (x, y, z) : x^2 + 2y^2 + 2z^2 \leq 16 \,\}.$$

Oppgave 87

La $\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} a+1 & a+1 & 0 \\ 4 & a+4 & a-1 \\ 3 & 5 & a-1 \end{pmatrix}$ for alle reelle tall a.

(a) Beregn $|\mathbf{A}_a|$.

(b) Når har likningssystemet

$$\begin{aligned} (a+1)x + (a+1)y \qquad\qquad &= b \\ 4x + (a+4)y + (a-1)z &= 1 \\ 3x + \qquad 5y + (a-1)z &= -3 \end{aligned}$$

entydig løsning? (Du trenger ikke finne løsningen.) Undersøk hvilke betingelser b må oppfylle for at likningssystemet ikke skal ha noen løsning når $a = 1$ og når $a = 2$.

(c) Beregn $|3\mathbf{A}_3|$ og $|\mathbf{A}_5 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3^2|$.

Oppgave 88

(a) Finn integralene (i) $\displaystyle\int 3xe^{-x/2}\, dx$ (ii) $\displaystyle\int_0^{25} \frac{1}{9 + \sqrt{x}}\, dx$ (iii) $\displaystyle\int_2^7 t\sqrt{t+2}\, dt$

(b) I et problem i teorien for auksjoner oppstår differensiallikningen

$$\dot{x} = \frac{4(a-t)}{(2t-a)^2} x, \qquad t > a/2$$

der a er en konstant. Finn den allmenne løsningen av likningen.

Oppgave 89

(a) Likningen

$$x^3 \ln x + y^3 \ln y = 2z^3 \ln z$$

definerer z som en deriverbar funksjon av x og y i en omegn om punktet $(x, y, z) = (e, e, e)$. Beregn $z_1'(e, e)$ og $z_{11}''(e, e)$.

(b) Hvis F er en deriverbar funksjon av en variabel med $F(0) = 0$ og $F'(0) \neq -1$, finn et uttrykk for y' i punktet $(x, y) = (1, 0)$ når y er definert implisitt som deriverbar funksjon av x ved

$$x^3 F(xy) + e^{xy} = x$$

4120n007 11.8.2003 774

Oppgave 90

La a være en konstant ≥ 0 og la $f(x) = (2x^2 + a)e^{-x^2-a}$.

(a) Beregn $f'(x)$ og finn alle de stasjonære punktene til f. (Du må skille mellom tilfellene $0 \leq a < 2$ og $a \geq 2$.)

(b) Vis at grafen til f er symmetrisk om y-aksen. Bestem $\lim_{x\to\infty} f(x)$ og $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(c) For hver $a \geq 0$ har $f(x)$ en maksimumsverdi, $M(a)$. Vis at

$$M(a) = \begin{cases} 2e^{-1-\frac{1}{2}a} & \text{når } 0 \leq a \leq 2 \\ ae^{-a} & \text{når } a > 2 \end{cases}$$

For hvilken verdi av a har $M(a)$ sin største verdi?

(d) Betrakt funksjonen g definert ved $g(x, y) = (2x^2 + y)e^{-x^2-y}$ for alle (x, y). Finn eventuelle stasjonære punkter for g. Finn den største verdien funksjonen antar over mengden $\{(x, y) : y \geq 0\}$. (Du kan gå ut fra at maksimumsverdien eksisterer.)

Oppgave 91

(a) Finn integralet $\displaystyle\int_2^\infty \frac{12x + 6}{(x^2 + x + 2)^{4/3}}\, dx$.

(b) I et problem i teorien for auksjoner oppstår differensiallikningen

$$(r_2 - r_1)\dot{x} = \left(\frac{r_1}{t - r_2} - \frac{r_2}{t - r_1}\right)x, \quad t > r_2$$

der r_1 og r_2 er konstanter med $r_2 > r_1$. Finn den allmenne løsningen av likningen. Vis at den kan skrives på formen

$$x = C(t - r_2)^{r_1/(r_2-r_1)}(t - r_1)^{-r_2/(r_2-r_1)} \qquad (C \text{ er en konstant})$$

Oppgave 92

(a) Finn stigningstallet for kurven $xe^{x^2y} + 3x^2 = 2y + 4$ i punktet $(x, y) = (1, 0)$.

(b) Betrakt likningssystemet

$$\begin{aligned} xe^y + yf(z) &= a \\ xg(x, y) + z^2 &= b \end{aligned}$$

der $f(z)$ og $g(x, y)$ er deriverbare funksjoner og a og b er konstanter. Anta at likningssystemet definerer x og y som deriverbare funksjoner av z. Finn uttrykk for dx/dz og dy/dz.

Oppgave 93

(a) Betrakt likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= b \\ ax_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 \qquad - x_3 &= a \end{aligned}$$

der a og b er gitte konstanter. For hvilke verdier av a har likningssystemet entydig løsning?

(b) Anta at $\mathbf{A}$ er en $n \times n$-matrise, $\mathbf{B}$ en $m \times m$-matrise og $\mathbf{C}$ en $n \times m$-matrise. Anta at $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ og $\mathbf{B}$ har inverser. Finn en formel for den matrisen $\mathbf{X}$ som tilfredsstiller matriselikningen $\mathbf{AXB} = \mathbf{XB} + \mathbf{C}$. La spesielt

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

og finn matrisene $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1}$, $\mathbf{B}^{-1}$ og $\mathbf{X}$ i dette tilfellet.

Oppgave 94

Finn følgende integraler: (a) $\displaystyle\int \frac{1}{(u-1)\sqrt{u}}\,du$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^y+1}}\,dy$.

(*Vink:* Du kan få bruk for formelen $\displaystyle\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right]$.)

Oppgave 95

Betrakt matrisene

$$\mathbf{A}_3(t) = \begin{pmatrix} 3-t & -4 & 2 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & -t \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{A}_4(t,a) = \begin{pmatrix} 3-t & -4 & 2 & a \\ 1 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -t \end{pmatrix}$$

(a) Beregn determinantene $|\mathbf{A}_3(t)|$ og $|\mathbf{A}_4(t,a)|$.

(b) Finn en nødvendig og tilstrekkelig betingelse på b_1, b_2 og b_3 for at likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= b_1 \\ x_1 - x_2 &= b_2 \\ x_2 - x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

skal ha løsninger, og bestem antall frihetsgrader i dette tilfellet.

(c) Anta at matrisen $\mathbf{P}$ har en invers. Hvilke av følgende matriser vil da også ha invers? (Gi begrunnelser.)

(i) $\mathbf{P}^2$ (ii) $\mathbf{P} + \mathbf{P}$ (iii) $\mathbf{P}'$ (iv) $\mathbf{P} + \mathbf{P}'$

Oppgave 96

(a) I første kvadrant definerer likningen

$$xy + y^2 + 2x + 2y = C \qquad (C \text{ er en konstant})$$

y som en C^2-funksjon av x. Beregn y' og y''.

(b) En konsument anvender et beløp m til innkjøp av x enheter av et gode til pris 6 kroner per enhet og y enheter av et annet gode til pris 10 kroner per enhet. Her er m positiv. Konsumentens nyttefunksjon er $U(x,y) = xy + y^2 + 2x + 2y$, slik at hans problem er:

$$\text{maksimer} \;\; (xy + y^2 + 2x + 2y) \;\; \text{under bibetingelsen} \;\; 6x + 10y = m$$

Anta at $8 < m < 40$. Finn de optimale kvantaene x^* og y^* og Lagrange-multiplikatoren som funksjoner av m.

(c) Maksimumsverdien for nyttefunksjonen blir en funksjon av m. Finn dens deriverte for $m = 20$.

(d) Hva blir løsningene for x^* og y^* hvis $m \leq 8$? Hva blir løsningene hvis $m \geq 40$?

Oppgave 97

La funksjonen φ være definert ved $\varphi(x) = \ln(x+1) - \ln(x+2) = \ln\left[\dfrac{x+1}{x+2}\right]$ for alle $x \geq 0$.

(a) Finn verdimengden til φ.

(b) Finn den inverse til φ. Hvor er den definert?

(c) Finn den inverse til φ'. Hvor er den definert?

Oppgave 98

Betrakt matrisene $\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & 1 & t \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) For hvilke verdier av t har $\mathbf{A}_t$ en invers?

(b) Beregn $\mathbf{I}_3 - \mathbf{B}\mathbf{A}_t$. For hvilke verdier av t har denne matrisen en invers? Finn en matrise $\mathbf{X}$ slik at $\mathbf{B} + \mathbf{X}\mathbf{A}_t^{-1} = \mathbf{A}_t^{-1}$ for $t = 1$.

(c) Finn matrisen $\mathbf{Y}$ når

$$\mathbf{Y}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 99

Anta at c er en konstant og at likningen

$$1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = c$$

definerer y som en deriverbar funksjon av x. Beregn dy/dx og d^2y/dx^2.

Oppgave 100

(a) Finn integralet $\displaystyle\int \frac{(x^n - x^m)^2}{\sqrt{x}}\, dx$, der m og n er naturlige tall.

(b) Beregn $\displaystyle\int_0^{1/3} \frac{dx}{e^x + 1}$.

(c) Løs differensiallikningen $\dot{x} = \dfrac{\sqrt[3]{ax+b}}{x}\, t^2$, der konstanten a er $\neq 0$.

Oppgave 101

I et statistisk problem opptrer funksjonen f definert for alle x og y ved

$$f(x, y) = 2(1 - \rho^2)x^2y^2 - 3x^2 - 3y^2 + 2\rho xy + 4$$

der ρ er en konstant som ligger i $[-1, 1]$.

(a) Beregn Hesse-matrisen til f. Vis at for $\rho = \pm 1$ har f bare har ett stasjonært punkt. Er dette punktet et globalt eller lokalt ekstrempunkt eller et sadelpunkt for f?

(b) Vis for alle ρ i $[-1, 1]$ at hvis (x_0, y_0) er et stasjonært punkt for f, så er $x_0^2 = y_0^2$. (*Vink:* Se på $xf_1'(x, y) - yf_2'(x, y)$.)

(c) Finn alle de stasjonære punktene til f når $\rho \in (-1, 1)$.

Oppgave 102

(a) Beregn determinanten til $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a-1 & a \\ a-1 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$.

(b) Bestem for hvilke verdier av a og b likningssystemet

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

har uendelig mange løsninger.

(c) For hvilke verdier av a fins det en matrise $\mathbf{B}$ slik at $\mathbf{AB} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$?

Oppgave 103

Antall liter bensin i tanken på en bil etter at den har kjørt x mil er $V(x)$. Anta at $V(x)$ tilfredsstiller differensiallikningen $V'(x) = -aV(x) - b$, der a og b er positive konstanter.

(a) Finn den allmenne løsningen av likningen.

(b) Anta at $a = 0.1$ og $b = 0.7$. Hvor mange mil kan bilen kjøre hvis den starter med 20 liter på tanken? Hva er det minste antall liter en må ha ved starten om bilen skal gå 15 mil?

Oppgave 104

Beregn (i) $\displaystyle\lim_{x \to 3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2 - x - 6}\right)$ (ii) $\displaystyle\int_{8.5}^{41} \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$

(*Vink:* Substituer $z^4 = 2x - 1$ i (ii).)

Oppgave 105

Likningen

$$x^2y^3 + (y+1)e^{-x} = x + 2 \qquad (*)$$

definerer y som en deriverbar funksjon av x rundt $(x, y) = (0, 1)$.

(a) Beregn y' i dette punktet.

(b) Vis at kurven gitt ved $(*)$ skjærer x-aksen nøyaktig ett sted.

Oppgave 106

Betrakt Lagrange-problemet

$$\text{maksimer } xyz \text{ når } \begin{cases} x+y+z=5 \\ xy+xz+yz=8 \end{cases}$$

(a) Still opp de nødvendige førsteordensbetingelsene for løsning av problemet.

(b) Vis at hvis punktet (x,y,z) tilfredsstiller førsteordensbetingelsene, så har vi

$$\begin{aligned} z(y-x) &= \mu(y-x) \\ y(x-z) &= \mu(x-z) \\ x(z-y) &= \mu(z-y) \end{aligned}$$

der μ er Lagrange-multiplikatoren knyttet til bibetingelsen $xy+xz+yz=8$.

(c) Løs problemet. Du kan gå ut fra at problemet har løsning.

(d) Hva blir den tilnærmede endringen av maksimumsverdien av xyz dersom 5 endres til 5.01 og 8 endres til 7.99?

Oppgave 107

Gitt funksjonen f definert ved $f(x)=\ln(2+e^{x-3})$ for alle x.

(a) Vis at f er strengt voksende og finn verdimengden.

(b) Finn et uttrykk for den inverse funksjonen g til f. Hvor er g definert?

(c) Kontroller at $f'(3)=1/g'(f(3))$.

Oppgave 108

Betrakt de to 3×3-matrisene $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} q & -1 & q-2 \\ 1 & -p & 2-p \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Beregn $|\mathbf{A}|$, $\mathbf{AE}$ og $|\mathbf{A}+\mathbf{E}|$.

(b) For hvilke verdier av p og q har $\mathbf{A}+\mathbf{E}$ en invers? Forklar hvorfor $\mathbf{BE}$ ikke kan ha invers for noen 3×3-matrise $\mathbf{B}$.

(c) Betrakt likningssystemet

$$\begin{aligned} qx - y &= q-2 \\ x - py &= 2-p \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}$$

der x og y er de ukjente og p og q er parametre. For hvilke verdier av p og q har likningssystemet entydig løsning, ingen løsninger eller uendelig mange løsninger?

Oppgave 109

(a) Finn integralet $\displaystyle\int_0^1 57x^2\sqrt[3]{19x^3+8}\,dx$.

(b) Løs differensiallikningen $\quad e^{3t}\dot{x}=\dfrac{x^3+1}{x^2}\quad (x>0),\quad$ med $x(0)=1$.

Oppgave 110

(a) Finn maksimum og minimum av $x^2 + y^2 + z$ når $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$.

(b) Anta at bibetingelsen endres til $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1.02$. Hva blir tilnærmet endringen i maksimumsverdien av $f(x, y, z)$?

Oppgave 111

Finn den løsningen av differensiallikningen $3x^2\dot{x} = (x^3 + 9)^{3/2} \ln t$ som går gjennom punktet $(t, x) = (1, 3)$.

Oppgave 112

Inntektene fra et oljefelt er per idag ($t = 0$) 1 milliard per år og de forventes å stige lineært til de har nådd 5 milliarder per år om 10 år. Hvis vi måler tiden i år og lar $f(t)$ betegne inntektene (målt i milliarder) per tidsenhet ved tidspunktet t, er altså $f(t) = 1 + 0.4t$. Hvis $F(t)$ betegner de totale inntektene som akkumuleres i tidsintervallet $[0, t]$, er $F'(t) = f(t)$.

(a) Beregn de totale inntektene i 10-årsperioden (dvs. $F(10)$).

(b) Finn nåverdien av inntektsstrømmen over tidsintervallet $[0, 10]$ hvis vi regner med kontinuerlig forrentning til rente $r = 0.05$ per år. (Nåverdien er $\int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt$, der T betegner slutt-tidspunktet.)

Oppgave 113

I et område der $x > 0$ og $y > 0$, vil likningen $\dfrac{y^3}{x^3} = (x + a)^p(y + b)^q$ definere y som en deriverbar funksjon av x. Finn elastisiteten av y mhp. x. Her er $a > 0$, $b > 0$, p og q konstanter.

Oppgave 114

(a) La $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 13 & 7 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Hvilke betingelser må b_1, b_2 og b_3 tilfredsstille for at likningssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ skal ha løsninger? Hvor mange frihetsgrader har systemet hvis det har løsninger?

(b) Fins det en invertibel matrise $\mathbf{B}$ slik at $\mathbf{BA} = \mathbf{0}$?

(c) Finn en 3×3-matrise $\mathbf{C}$ slik at $\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$ og $\mathbf{AC} = \mathbf{0}$.

Oppgave 115

Betrakt problemet

$$\text{maksimer} \quad f(x, y, z) = xy + e^z \quad \text{når} \quad g(x, y, z) = e^{2z} + x^2 + 4y^2 = 6 \qquad (*)$$

(a) Finn alle løsninger av førsteordensbetingelsene, og bestem maksimumspunktet for problemet $(*)$. Du kan gå ut fra at det eksisterer et maksimumspunkt.

(b) Anslå den endringen vi får i den optimale verdien av f om vi endrer bibetingelsen til $e^{2z} + x^2 + 4y^2 = 6.1$.

(c) Hvis vi endrer bibetingelsen i problemet $(*)$ til $e^{2z} + x^2 + 4y^2 \leq 6$, vil problemet da få en annen løsning enn den du fant i (a)?

4120n007 11.8.2003 774

Oppgave 116

Gitt funksjonen $f(x) = \left(e^{2x} + ae^{-x}\right)^2$, der a er en konstant, $a \neq 0$.

(a) Finn $f'(x)$ og $f''(x)$.

(b) Avgjør hvor f er voksende, og vis at f er konveks overalt.

(c) Finn eventuelle globale ekstrempunkter for f.

(d) La $a = 4$, og finn et eventuelt minimumspunkt for f over intervallet $[1, \infty)$ i dette tilfellet.

Oppgave 117

Finn grenseverdien $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2}$.

Oppgave 118

Finn integralene: (a) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\,(1+e^{\sqrt{x}})}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^{e^2} \sqrt{x}\ln x\,dx$

Oppgave 119

Finn $F'(x)$ når $F(x) = \displaystyle\int_4^x \left(\sqrt{u} + \frac{x}{\sqrt{u}}\right) du.$

Oppgave 120

(a) Finn den allmenne løsningen av differensiallikningen $\dot{x} + 2x = 2$.

(b) Finn en funksjon $w = w(t)$ som er slik at

$$\ddot{w} + 2\dot{w} = 2, \quad w(0) = 0 \quad \text{og} \quad w\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - e.$$

Oppgave 121

(a) Finn maksimum av $e^x y$ når $(x-1)^2 + y^2 = 12$.

(b) Anta at vi endrer bibetingelsen i (a) til $(x-1)^2 + y^2 = 12.03$. Hvor stor prosentvis endring (tilnærmet) vil vi da få i maksimumsverdien i problemet?

Oppgave 122

Funksjonen f er definert ved $f(x) = x^3 e^{-x^2}$ for alle x.

(a) Beregn $f'(x)$ og $f''(x)$.

(b) Vis at grafen til f er symmetrisk om origo. Bestem $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

(c) Finn eventuelle maksimums- og minimumspunkter og skisser grafen.

(d) Beregn $\int f(x)\,dx$ og $\int_0^\infty f(x)\,dx$.

(e) La $0 < a < b$. Forklar geometrisk eller på annen måte at følgende likhet gjelder: $\displaystyle\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$

Oppgave 123

(a) Beregn integralet $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

(b) Bestem grenseverdien $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{a^{2x}-a^2}{2x-2}$.

Oppgave 124

(a) For hvilke verdier av p og q har likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= q \\ px_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 \qquad - x_3 &= p \end{aligned}$$

nøyaktig én løsning, flere løsninger eller ingen løsninger?

(b) Finn alle løsningene av systemet i det tilfellet at systemet har flere løsninger.

(c) Beregn determinanten $\begin{vmatrix} 31 & 32 & 33 \\ 32 & 33 & 35 \\ 33 & 34 & 36 \end{vmatrix}$. (*Vink:* Det kan være gunstig å benytte elementære operasjoner på linjene og/eller kolonnene.)

(d) Vis at om $\mathbf{A}$ er en $n \times n$-matrise slik at $\mathbf{A}^4 = \mathbf{0}$, da er $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3$.

Oppgave 125

La funksjonen f være definert ved $f(x,y) = xye^{4x^2-5xy+y^2}$ for alle (x,y).

(a) Beregn de partielle deriverte til f av første orden.

(b) Finn de tre stasjonære punktene til f, og vis at f ikke har (globale) ekstrempunkter.

(c) Nivåkurven $f(x,y) = 1$ går gjennom punktet $(x,y) = (1,1)$. Finn stigningstallet til tangenten til nivåkurven i dette punktet.

Oppgave 126

La funksjonen f være definert ved $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ for alle $x \geq 0$.

(a) Finn eventuelle maksimums- og minimumspunkter for f.

(b) Beregn $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$.

Oppgave 127

(a) Beregn integralet $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x^3}{x^2}\,dx$

(b) Bestem den løsningen av differensiallikningen

$$x\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}(x^2 - 25), \qquad x > 5 \tag{$*$}$$

som går gjennom punktet $P = (0, 10)$. Hva er stigningstallet til denne integralkurven i P? Påvis at enhver løsning av $(*)$ er avtagende.

Oppgave 128

(a) Beregn determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

(b) Betrakt likningssystemet

$$\begin{aligned} x + \ y + \ az + \ \ au &= a \\ 2x + \ y - a^2 z + \ 2au &= 1 \\ 4x + 3y + a^2 z + 4a^2 u &= 1 \end{aligned}$$

der x, y, z og u er ukjente og a er en konstant. Finn antall frihetsgrader for alle verdier av a. (Bruk Gauss-eliminasjon.)

(c) Anta at $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ er $n \times n$-matriser og at $\mathbf{A}^2\mathbf{B} = \mathbf{AB}$. Vis at da er $\mathbf{A}^4\mathbf{B} = \mathbf{AB}$.

Oppgave 129

Betrakt problemet å maksimere $x + 2z$ når $\begin{cases} x + \ y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z = 7/4 \end{cases}$

(a) Vis at en ved å eliminere Lagrange-multiplikatorene fra førsteordensbetingelsene, kan utlede likningen $4x - 2y = 1$. Finn dernest den eneste mulige løsningen av problemet.

(b) Kan du bevise at du har funnet løsningen i punkt (a)?

Oppgave 130

Likningssystemet

$$\begin{aligned} \ln(e^{x^2 y} + z) &= 1 \\ e^{\ln(x^2+z) - 2z} + 2y &= 3 \end{aligned}$$

definerer y og z som deriverbare funksjoner av x rundt punktet $P = (x, y, z) = (1, 1, 0)$. Finn dy/dx og dz/dx i punktet P. Finn også $\mathrm{El}_x\, y$ i P.

Oppgave 131

(a) La $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & a & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$. Beregn $|\mathbf{A}|$ og $\mathbf{A}^2$.

(b) Bestem antall frihetsgrader for likningssystemet

$$\begin{aligned} x + ay + az &= 0 \\ ax + ay + az &= 0 \\ ax + ay + \ z &= 0 \end{aligned}$$

for alle verdier av a.

(c) Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} x + ay + az &= 1 \\ ax + ay + az &= a^2 \\ ax + ay + \ z &= 1 \end{aligned}$$

for alle verdier av a.

Oppgave 132

Betrakt funksjonen f definert ved

$$f(x,y) = \tfrac{1}{2}x^2 - x + ay(x-1) - \tfrac{1}{3}y^3 + a^2y^2 \quad \text{for alle } (x,y)$$

der a er en konstant. Finn alle de stasjonære punktene til f og bestem om de er lokale ekstrempunkter eller sadelpunkter.

Oppgave 133

Et land har et oljefelt som det ønsker å utvinne. Det vil starte produksjonen i dag, $t = 0$, og har valgt mellom to utvinningsprofiler f og g som angir produksjonen av olje per tidsenhet. Feltets levetid er for hver av utvinningsprofilene 10 år. Her er $f(t) = 10t^2 - t^3$, $t \in [0, 10]$, og $g(t) = t^3 - 20t^2 + 100t$, $t \in [0, 10]$.

(a) Skisser de to utvinningsprofilene i samme koordinatsystem.

(b) Vis at $\int_0^t g(\tau)\,d\tau \geq \int_0^t f(\tau)\,d\tau$ for alle t i $[0, 10]$.

(c) Landet får en pris per enhet olje som er gitt ved $p(t) = 1 + 1/(t+1)$, der t er antall år. De totale oljeinntektene er da gitt ved henholdsvis $\int_0^{10} p(t)f(t)\,dt$ og $\int_0^{10} p(t)g(t)\,dt$. Beregn disse integralene. Hvilken av de to utvinningsprofilene bør velges?

Oppgave 134

Løs differensiallikningene

$$\text{(a) } \dot{x} + 4x = 3e^t, \quad x(0) = 1 \qquad\qquad \text{(b) } \dot{x} = \frac{e^{-3x}}{3 + \sqrt{t+8}}, \quad x(1) = 0$$

Oppgave 135

La f være definert ved $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 2}{x^2 + 1}$ for alle x.

(a) Finn $f'(x)$ og bestem funksjonens lokale ekstrempunkter.

(b) Bestem $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ og skisser grafen i store trekk.

(c) Definer funksjonen F ved formelen $F(x) = \ln f(x)$. Hvor er F definert? Hva er verdimengen til F? Skisser grafen til F i store trekk.

Oppgave 136

(a) Formlene $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ og $O = 4\pi r^2$ angir henholdsvis volumet og overflatearealet av en kule med radius r. Vis at $O = kV^{2/3}$ for en konstant k.

(b) En kuleformet møllkule fordamper med en hastighet som er proporsjonal med kulens overflateareal. Hvis $M(t)$ er massen ved tidspunkt t, er da $dM(t)/dt = -s(M(t))^{2/3}$, der s er en positiv konstant. Finn den løsningen av denne differensiallikningen som gir $M(0) = 1$.

(c) $M(t)$ måles i gram og t måles i døgn. Ved $t = 0$ er møllkulas vekt 1 gram, og 75 døgn seinere er vekten 0.5 gram. Bestem verdien av s. Hvor lang tid tar det før hele møllkula har fordampet?

4120n007 11.8.2003 774

Oppgave 137

Beregn integralene: (a) $\displaystyle\int_4^9 \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x}\,)\,dx$

Oppgave 138

Betrakt problemet å maksimere $e^x + y + z$ når $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$

(a) Finn løsningen av problemet ved å bruke Lagranges metode.

(b) Erstatt bibetingelsene med $x+y+z = 1.02$ og $x^2+y^2+z^2 = 0.98$. Hva blir (omtrent) endringen i den maksimale verdien av kriteriefunksjonen?

Oppgave 139

(a) For hvilke a har følgende matrise en invers?

$$\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 1 & 2 & a+1 \end{pmatrix}$$

(b) Finn den inverse for $a = 0$.

(c) La $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ og $\mathbf{D}$ være $n \times n$-matriser der $|\mathbf{A}| \neq 0$ og $|\mathbf{B}| \neq 0$. Vis at det fins matriser $\mathbf{X}$ og $\mathbf{Y}$ slik at

$$\mathbf{AX} + 2\mathbf{AY} = \mathbf{C}$$
$$\mathbf{A}^2\mathbf{XB} + \mathbf{A}^2\mathbf{YB} = \mathbf{D}$$

Oppgave 140

La f være funksjonen gitt ved $f(x) = 2x^2 - \ln x - 2,\ x > 0$.

(a) Finn eventuelle ekstrempunkter og ekstremverdier for f.

(b) Det er klart at $x = 1$ er en løsning av likningen $f(x) = 0$. Vis at denne likningen har nøyaktig en annen løsning $x = x_1$, der x_1 er et tall i intervallet $(0, 1)$. Du skal ikke finne x_1. Skisser grafen til f.

(c) Finn eventuelle lokale eller globale ekstrempunkter for $g(x) = \dfrac{1}{2x^2 - \ln x - 2}$.

(d) Skisser grafen til g.

Oppgave 141

La funksjonen f være definert ved $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2e^y - \frac{1}{3}x^3 - ye^{3y}$ for alle (x, y).

(a) Beregn de partielle deriverte av f av første og annen orden.

(b) Finn eventuelle stasjonære punkter og klassifiser dem. Har f globale ekstrempunkter?

(c) Nivåkurven $f(x, y) = -\frac{2}{3}$ går gjennom punktet $(x, y) = (2, 0)$. Finn stigningstallet til tangenten til nivåkurven i dette punktet.

Oppgave 142

(a) La $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -9 \end{pmatrix}$. Beregn $|\mathbf{A}| = 0$.

(b) Hvilke betingelser må b_1, b_2 og b_3 tilfredsstille for at likningssystemet

$$\begin{aligned} x + 3y + 4z &= b_1 \\ 2x + 2y + z &= b_2 \\ 3x - 3y - 9z &= b_3 \end{aligned}$$

skal ha løsninger?

Oppgave 143

(a) Løs differensiallikningen $\dot{x} + 4x = 4e^{-2t}$, $x(0) = 1$.

(b) Anta at $y = (a + \alpha k)\sqrt{t+1}$ betegner produksjonen som funksjon av kapitalen k, der faktoren $\sqrt{t+1}$ skyldes teknisk fremgang. Anta at en konstant andel s (der $s \in (0, 1)$) spares, og at kapitalakkumulasjonen er lik sparingen, slik at vi ledes til den separable differensiallikningen

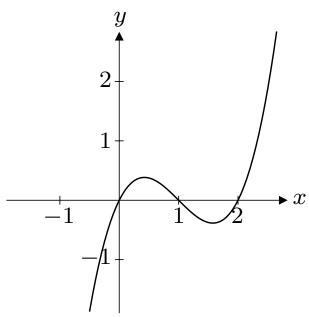
$$\dot{k} = s(a + \alpha k)\sqrt{t+1}, \quad k(0) = k_0$$

Konstantene a, α og k_0 er positive. Finn løsningen.

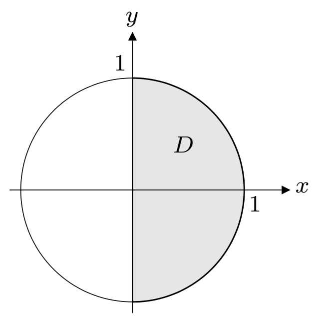
4120n007 11.8.2003 774

Fasit

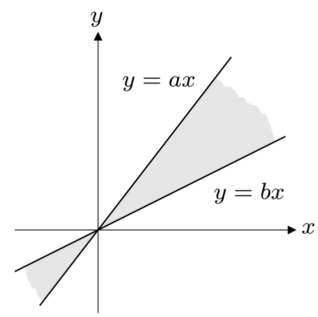
1. (a) $f(x) > 0$ når $0 < x < 1$ og når $x > 2$.
(b) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$. La $x_0 = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$ og $x_1 = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Da vokser f i $(-\infty, x_0]$ og i $[x_1, \infty)$, og f avtar i $[x_0, x_1]$. x_0 er lokalt maksimumspunkt med $f(x_0) = \frac{2}{9}\sqrt{3}$, mens x_1 er lokalt minimumspunkt med $f(x_1) = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$. $f(x)$ er strengt konveks i $[1, \infty)$. (c) Se figur A.1. $\int_0^1 f(x)\,dx = 1/4$.



Figur A.1



Figur A.2



Figur A.3

2. (a) Se figur A.2. (b) Lokalt maksimum i $(0,0)$, sadelpunkt i $(2/3, 0)$.
(c) Globalt maksimum i $(0,0)$ og i $(1,0)$. Maksimumsverdi 3. Globalt minimum i $(0,-1)$ og i $(0,1)$. Minimumsverdi 2.

3. $D = -y^2 + (a+b)xy - abx^2 = -(y-ax)(y-bx)$ er lik 0 langs linjene $y = ax$ og $y = bx$. $D > 0$ når (i) $x > 0$ og $bx < y < ax$ eller (ii) $x < 0$ og $ax < y < bx$. Se figur A.3.

4. (b) $L = 10$, $K = 6.25$ millioner.

5. (a) $|\mathbf{A}| = a(a^2 + 2b^2)$, $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab & b^2 \\ -2ab & a^2 - 2b^2 & 2ab \\ b^2 & -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$ (c) $a = 0$

6. (a) f er definert i $[-6, 0) \cup (0, \infty)$. (b) $f(x) = 0 \iff x = -2$ eller $x = -6$, $f(x) > 0$ i $(-6, -2)$ og i $(0, \infty)$. (c) Lokalt maksimum i $(-4, \frac{1}{2}\sqrt{2})$, lokalt minimum i $(6, \frac{8}{3}\sqrt{3})$ og i $(-6, 0)$. (d) $f(x) \to -\infty$ når $x \to 0^-$, $f(x) \to \infty$ når $x \to 0^+$, $f(x) \to \infty$ når $x \to \infty$, $f'(x) \to 0$ når $x \to \infty$. Se figur A.6.

7. (a) Maksimal nettofortjeneste for $x = \sqrt{(a-c)/6}$, $y = b^2/4d^2$.
(b) $\mathrm{El}_y N = \dfrac{1}{N}\Big(\dfrac{1}{2}b\sqrt{y} - dy\Big)$, $\mathrm{El}_y N = 0$ når $y = b^2/4d^2$.
(N er nettofortjenesten.)

8. (a) $f_1' = 5y - ax^{a-1}y^a$, $f_2' = 5x - ax^a y^{a-1}$,
$f_{11}'' = -a(a-1)x^{a-2}y^a$, $f_{12}'' = 5 - a^2 x^{a-1} y^{a-1}$, $f_{22}'' = -a(a-1)x^a y^{a-2}$.
(b) Alle (x, y) med $xy = (5/a)^{1/(a-1)}$ er stasjonære punkter. Annenderiverttesten gir ingen avgjørelse. (c) f oppnår maksimum langs $xy = (5/a)^{1/(a-1)}$. (d) $h(z) =$

4120n007 11.8.2003 774

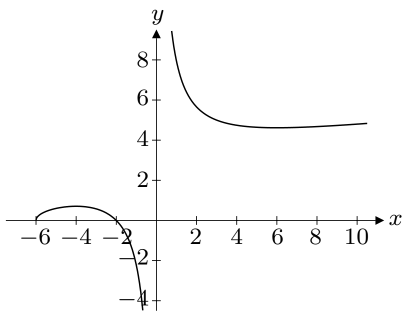


Figure A.6

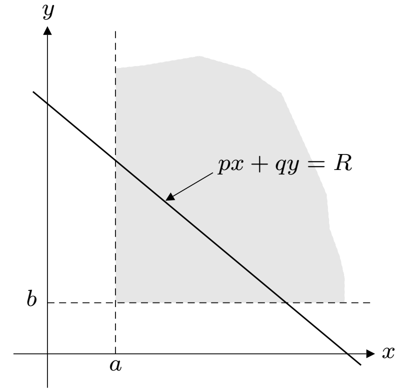


Figure A.10

0 har ingen, en eller to røtter etter som $5(5/a)^{1/(a-1)}\left(1 - \dfrac{1}{a}\right) < c$, $= c$ eller $> c$.
(e) $x = \sqrt{q/p}\,$, $y = \sqrt{p/q}$ løser minimeringsproblemet.

9. (a) $\dfrac{\partial x}{\partial K} = \dfrac{x}{2K(1+4\ln x)}$, $\quad \dfrac{\partial x}{\partial L} = \dfrac{x}{3L(1+4\ln x)}$, $\quad \dfrac{\partial^2 x}{\partial K \partial L} = \dfrac{x(4\ln x - 3)}{6KL(1+4\ln x)^3}$

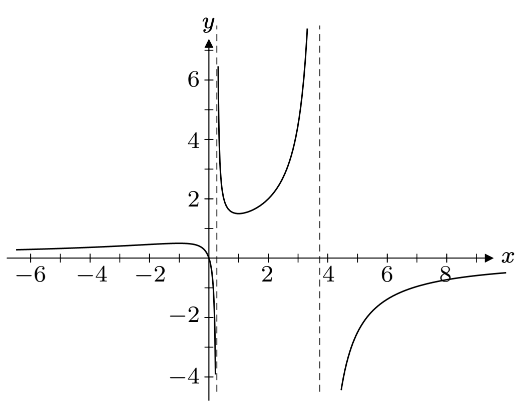
10. (a) U er definert i $S = \{\,(x,y) : x > a \text{ og } y > b\,\}$.
(c) Kravet blir $pa + qb < R$. Se figur A.10.

11. (a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $f'(x) = \dfrac{x^2e^x - (e^x-1)^2}{x^2(e^x-1)^2}$

12. (a) $|\mathbf{T}| = \frac{1}{2}pq(1-p-q)$. $\mathbf{T}^{-1}$ eksisterer $\iff p + q \neq 1$. $|\mathbf{S}| = 0$, så $\mathbf{S}$ har ingen invers. (c) $\mathbf{T}^n = \dfrac{1}{2^{n-1}}\mathbf{T} + \dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}\mathbf{S} \to \mathbf{S}$ når $n \to \infty$.

13. (a) Med $\mathcal{L}(x,y) = U(x,y) - \lambda(py - w(24-x))$, følger (2) av førsteordensbetingelsene $\mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}'_2 = 0$. (b) Deriver (1) og (2) mhp. w mens p holdes konstant.
(c) $\partial x/\partial w = 4(1-\ln 16)/(1+\ln 16)$.

14. $x = A\dfrac{e^t}{t^2} + \dfrac{e^{2t}}{t} - \dfrac{e^{2t}}{t^2}$; $A = 0$



Til oppgave A.15

15. (a) $f(q)$ er definert $\iff 2q - (p-q)^2 \neq 0 \iff q \neq p + 1 \pm \sqrt{2p+1}$.
$f(q) \to 0$ når $q \to \infty$ og når $q \to -\infty$. (b) $f'(q) = \dfrac{2\hat{z}(q+p)(q-p)}{\left(2q-(p-q)^2\right)^2}$. De stasjonære punktene er $q = \pm p$. $q = -p$ er et lokalt maksimumspunkt, og $q = p$ er et lokalt minimumspunkt. (c) Figur A.15 viser grafen når $p = 1$ og $\hat{z} = 1.5$.

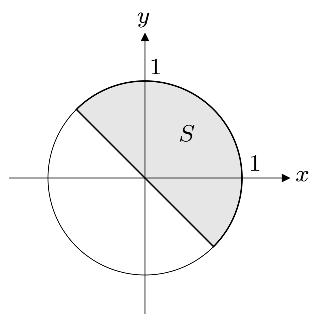
4120n007 11.8.2003 774

16. (a) $f_1' = 2(x+y-2) + 2(x^2+y-2)2x$, $f_2' = 2(x+y-2) + 2(x^2+y-2)$,
$f_{11}'' = 12x^2 + 4y - 6$, $f_{12}'' = f_{21}'' = 4x+2$, $f_{22}'' = 4$.
(b) $(0,2)$ og $(1,1)$ er lokale (og faktisk globale) minimumspunkter, og $(1/2, 13/8)$ er et sadelpunkt. (c) $g'(t) = 4p^4t^3 + 6p^2qt^2 + (-6p^2 + 4q^2 + 4pq)t - 4p - 8q$.

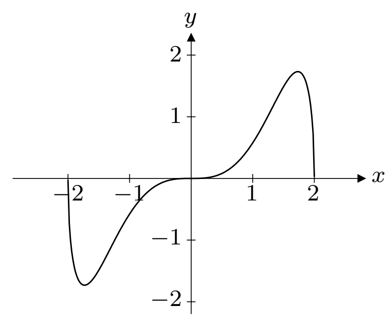
17. (a) $|\mathbf{D}| = a+2b+c$. $\mathbf{C}\cdot\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a-32 & b+35 & c-38 \\ 2a-66 & 2b+71 & 2c-76 \\ a-33 & b+35 & c-37 \end{pmatrix}$. Vi ser at $\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}$ for $a = 33$, $b = -35$, $c = 38$. (b) $\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{H}$. ($\mathbf{A}$ har invers siden $|\mathbf{A}| = -2 \neq 0$.)

18. 1. (Bruk l'Hôpitals regel.)

19. (a) $f_1' = \dfrac{2}{2x+y+2} - 2$, $f_2' = \dfrac{1}{2x+y+2} - 1$,
$f_{11}'' = \dfrac{-4}{(2x+y+2)^2}$, $f_{12}'' = f_{21}'' = \dfrac{-2}{(2x+y+2)^2}$, $f_{22}'' = \dfrac{-1}{(2x+y+2)^2}$.
(b) De stasjonære punktene er alle punktene på linjen $2x+y = -1$. (c) Se figur A.19. Funksjonen har maksimumsverdien $\ln\left(2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{2}$, som oppnås i punktet $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$.



Figur A.19



Figur A.26

20. (a) $\begin{pmatrix} f_{11}'' & f_{12}'' \\ f_{21}'' & f_{22}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-x-y} - e^{-x} & \frac{1}{2}e^{-x-y} \\ \frac{1}{2}e^{-x-y} & \frac{1}{2}e^{-x-y} - e^{-y} \end{pmatrix}$

21. (a) $\frac{1}{6}(2x-1)^3 + \frac{1}{2}e^{2x-2} + C$ (b) $\frac{1}{2}x^2 - x - \ln|x-1| + C$ (c) $\ln 4/3 \approx 0.29$

22. (a) $U'(x) = aAe^{-ax} - bBe^{bx}$ (b) Konkav for alle x. (c) $C = aAe^{-ax^*} = bBe^{bx^*}$
(d) *Vink:* $U(x) \approx U(x^*) + U'(x^*)(x-x^*) + \frac{1}{2}U''(x^*)(x-x^*)^2$

23. $\mathrm{El}_x\, y = a + 2b\ln x + c/\ln x$. y er definert som en funksjon av x for $x > 1$.

24. (a) $(-1,0)$ er et lokalt maksimumspunkt. (c) Maksimum for $x = \sqrt[4]{2} - 1$, $y = 1/\sqrt[4]{2}$.
(d) Minimeringsproblemet har ingen løsning.

25. (a) $\mathbf{A}_t$ har invers $\iff t \neq -1$. $\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{A}_t$ har ikke invers for noen verdi av t.
(b) $\mathbf{X} = \mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

26. (a) f er definert i $[-2,2]$. $f(x) + f(-x) = 0$, så grafen til f er symmetrisk om origo.
(b) $f'(x) = \dfrac{4x^2(3-x^2)}{3\sqrt{4-x^2}}$. f vokser i $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\,]$ og avtar i $[-2, -\sqrt{3}\,]$ og i $[\sqrt{3}, 2]$.
(c) Se figur A.26. (d) $g'\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3}/8$

27. $-1/6$

28. (a) $g''(x) = -ae^{-x}(x-1)(x-3)$. g er konveks i $[1,3]$. (b) $g(x) \to \infty$ når $x \to \infty$.
(e) $\dfrac{dx_0}{da} = \dfrac{1+x_0^2}{2e^{x_0} + a(x_0-1)^2}$ (f) $1/2$

29. (a) $k = b - a$ (c) $\dfrac{dE}{dt} = \Big(\dfrac{-a}{p}\dfrac{dp}{dt} + \dfrac{b}{r}\dfrac{dr}{dt}\Big)E$ (d) $b \geq a\,\dfrac{\ln 1.06}{\ln 1.08}$

30. (a) $x = -2\sqrt{b}$, $y = 0$ løser maksimeringsproblemet. $x = 4/3$, $y = \pm\sqrt{b - 4/9}$ løser minimeringsproblemet.

31. (a) (i) Homogen av grad 4. (ii) Ikke homogen. (iii) Homogen av grad 0.

32. (a) $f'(x) = \dfrac{e^{2x}(2x^2 + 2x + 1)}{(x+1)^2}$. Ingen lokale ekstrempunkter.
(b) $f(x)$ går mot henholdsvis $-\infty$, ∞, 0 og ∞. (d) f er konkav i $(-1, x_0)$.

33. (b) Minimum $= -298/3$ i $(4, 10)$.

34. $\mathbf{X} = (\mathbf{B} - \mathbf{C})^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{D}^{-1}$

35. (a) Systemet har en frihetsgrad.
(b) $\dfrac{dy}{dg} = \dfrac{L'(r)S'_g}{D}$, $\dfrac{dr}{dg} = \dfrac{-lPS'_g}{D}$, der $D = lP(S'_r - I'_r) - L'(r)(S'_y - I'_y)$.

36. (a) $f'(x) = 1 + (\alpha + \beta)e^{-x} - 2\alpha e^{-2x}$, $f''(x) = -(\alpha + \beta)e^{-x} + 4\alpha e^{-2x}$.
(b) $\bar{x} = \ln \dfrac{4\alpha}{\alpha + \beta} > 0$, siden $4\alpha > \alpha + \beta$ når $\alpha > \beta$. (f) $\alpha > \beta + 1$

37. (a) $|\mathbf{A}| = 1$, $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

38. (a) $du = -(8/3)\,dx + (10/3)\,dy$, $dv = 2\,dx - dy$, $\partial u/\partial y = 10/3$, $\partial v/\partial x = 2$.
(b) $\Delta u \approx du = -2.8/3 \approx -0.93$, $\Delta v \approx dv = 0.4$.

39. (a) $(x_0, y_0) = \left(\dfrac{3 + \sqrt{17}}{8}, \dfrac{-1 + \sqrt{17}}{8}\right)$
(b) (x_0, y_0) er et globalt maksimumspunkt. Globalt minimum fins ikke.

40. (a) $x - \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{5}x^5 + C$ (b) $a(P_L - P_N) - \dfrac{b}{2-\alpha}\left(P_L^{2-\alpha} - P_N^{2-\alpha}\right)$

41. (a) $f'_1 = e^{x+y} + e^{x-y} - 3/2$, $f'_2 = e^{x+y} - e^{x-y} - 1/2$,
$f''_{11} = e^{x+y} + e^{x-y}$, $f''_{12} = e^{x+y} - e^{x-y}$, $f''_{22} = e^{x+y} + e^{x-y}$.
(b) $(-\frac{1}{2}\ln 2, \frac{1}{2}\ln 2)$ er minimumspunktet.

42. (a) $1\mathbf{A}_t| = 2t - 4$. $\mathbf{A}_t$ har invers $\iff t \neq 2$. (b) Vis at $\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1^{-1} = I_3$.
(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Løsning: $x = -5/2$, $y = -1$, $z = 11/2$.

43. $\dfrac{dX}{dN} = g(u) + g'(u)\big(\varphi'(N) - u\big)$, $\dfrac{d^2X}{dN^2} = \dfrac{1}{N}g''(u)\big(\varphi'(N) - u\big)^2 + g'(u)\varphi''(N)$,
der $u = \varphi(N)/N$.

44. (a) $f'_1(x,y) = e^{-x/y}(y - x)$, $f'_2(x,y) = e^{-x/y}x(1 + x/y)$
(b) $\mathrm{El}_x\, f(x,y) = 1 - x/y$, $\mathrm{El}_y\, f(x,y) = 1 + x/y$.
(c) $f(x,x) = x^2e^{-1} \to \infty$ når $x \to \infty$. (d) $x = c(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,)$, $y = \frac{1}{2}c\sqrt{2}$

45. $a = -3/4$ og $b = 3/4$. (Da blir $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_3$.)

46. (a) $|\mathbf{A} - \mathbf{I}| = t - 1$. (b) $\mathbf{x}_0 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (c) $\mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$ for alle $n = 1, 2, \ldots$.

47. (a) $f'(x) = -2x + 1 - e^{-x}$, $f''(x) = -2 + e^{-x}$. (b) f' er strengt voksende i $[-3, -\ln 2]$. (c) $f'(x) = 0$ har nøyaktig to løsninger i $[-3, 3]$. Den ene ligger i $(-3, -\ln 2)$ og den andre i $(-\ln 2, 3)$. (d) Maksimumspunktet for $f(x)$ over $[-3, 3]$ er $x = -3$, og maksimumsverdien er $f(-3) = e^3 - 12$.

4120n007 11.8.2003 774

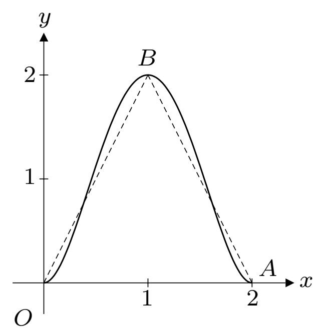
48. (a) $(\mathbf{B}-\mathbf{I})^3 = \mathbf{B}^3 - 3\mathbf{B}^2 + 3\mathbf{B} - \mathbf{I}$, osv. (b) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

49. (a) Deriver høyresiden. (b) 686/3. (*Vink:* Substituer $u = x^2 + 9$.)

50. (a) Entydig løsning når $k \neq 2$ og $k \neq 3$. (b) Ingen løsning når $k = 3$.

51. (a) De nødvendige betingelsene er $-2x + \lambda y = 0$, $-2y + \lambda x = 0$, $4 - 2z - \lambda = 0$ og $z = xy$. (b) $(0,0,0)$, $(1,1,1)$ og $(-1,-1,1)$. (c) $\Delta f^* \approx \lambda \cdot 0.1 = 0.2$.

52. $\mathbf{AA}' = \begin{pmatrix} 21 & 11 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{AA}'| = 89$, $(\mathbf{AA}')^{-1} = \dfrac{1}{89}\begin{pmatrix} 10 & -11 \\ -11 & 21 \end{pmatrix}$
(b) Nei. For enhver matrise $\mathbf{A}$ er $\mathbf{AA}'$ symmetrisk, og den inverse til en symmetrisk matrise er igjen symmetrisk. (c) Matrisen $(1/m)\mathbf{1} \cdot \mathbf{X}$ er $1 \times n$-matrisen (linjevektoren) $\big(\frac{1}{m}(x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1}), \ldots, \frac{1}{m}(x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn})\big)$, der den i-te komponenten, altså $\frac{1}{m}(x_{1i} + x_{2i} + \cdots + x_{mi})$, er det aritmetiske gjennomsnittet av de m observasjonene av størrelse nr. i.



Figur A.53

53. (a) $32/15 \approx 2.133$. Grafen til funksjonen er tegnet i figur A.53. Arealet av trekanten OAB er akkurat 2. (b) Se på fortegnet til $\dot{x}$. $\ddot{x} = (1 + x^2)(2xt^2 + 1) > 0$ for alle x.
(c) $\mathrm{El}_x\, y = \dfrac{x - ay^2}{2x + by^2}$

54. $(0,0)$ er et sadelpunkt. $(5/6, -5/12)$ er et lokalt maksimumspunkt.

55. (a) $t = 4, s = -5$ (b) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 1/6 \\ 1/2 & 3 & -3 & 1/6 \\ 1/2 & -1 & 2 & 1/6 \end{pmatrix}$
(c) $\mathbf{D}^6 = 182\mathbf{D} + 183\mathbf{I}_n$, $\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{3}\mathbf{D} - \frac{2}{3}\mathbf{I}_n$

56. (a) $(\sqrt{A}, 0)$, $(-\sqrt{A}, 0)$, $(0, \sqrt{A}\,)$ og $(0, -\sqrt{A}\,)$ (b) $y' = \dfrac{-2xe^{ay}}{2y + ax^2e^{ay}}$
(d) $x = \dfrac{\sqrt{2}}{a} e^{-\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + a^2A}\,)} \sqrt{\sqrt{1 + a^2A} - 1}$, $\quad y = \big(1 - \sqrt{1 + a^2A}\big)/a$

57. (a) f er homogen av grad 3. $k = 3$. (b) $y' = -\dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$. Tangenten er gitt ved $y = \dfrac{4}{5}x - \dfrac{13}{5}$. (c) $y'' = -\dfrac{78}{125}$. (d) $y_{\min} = -\sqrt[3]{13}$.

58. (a) $5t^2 - 45t + 40$. (b) Entydig løsning hvis $t \neq 1$ og $t \neq 8$. (c) $x = 8$, $y = 3$, $z = -1$. (d) $s = -1/4$.

59. (a) $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{I}_3 + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 30 & 5 & 1 \end{pmatrix}$,

4120n007 11.8.2003 774

$(\mathbf{I}_3 - \mathbf{A})(\mathbf{I}_3 + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2) = \mathbf{I}_3$. (b) $(\mathbf{I}_3 - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I}_3 + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2$.

(c) *Vink:* Vis at $\mathbf{U}^2 = n\mathbf{U}$. (d) $\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -3 & 7 & -3 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

60. (a) $U_1'(x,y) = A\dfrac{\alpha x^{\alpha-1}}{x^\alpha + y^\alpha}$, $U_2'(x,y) = -A\dfrac{\alpha x^\alpha}{y(x^\alpha + y^\alpha)}$,
$U_{12}''(x,y) = -A\dfrac{\alpha^2 x^{\alpha-1} y^{\alpha-1}}{(x^\alpha + y^\alpha)^2}$.
(b) U er homogen av grad 0. (c) $x = \sqrt[4]{3b/a}$ (med $y = \sqrt[3]{4b}$).

61. (a) Differensiering gir likningssystemet

$$\frac{1}{x+u}(dx + du) + u\,dv + v\,du - 2ye^v\,dy - y^2e^v\,dv + dy = 0$$
$$2u\,du - \frac{x^v v}{x}\,dx - x^v \ln x\,dv = dv$$

(b) $u_x' = -\dfrac{1+\ln 2}{5+\ln 2}$, $u_y' = \dfrac{1+\ln 2}{5+\ln 2}$, $v_x' = \dfrac{2}{5+\ln 2}$, $v_y' = -\dfrac{2}{5+\ln 2}$.
(c) $u(1.99, 1.02) \approx u(2,1) + u_x'(2,1)\cdot(-0.01) + u_y'(2,1)\cdot 0.02) \approx -0.9911$.

62. (a) $|\mathbf{A}_a| = -2a^3 - 3a^2 + 1 = (a+1)^2(1-2a)$ (b) $k = 1/(1-a-2a^2)$

63. (a) Stigningstall: $-3/2$. Lineær approksimasjon: $y(x) \approx -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$.
(b) $\dfrac{\partial p}{\partial r} = \dfrac{L}{F(L)}$, $\dfrac{\partial p}{\partial B} = \dfrac{1}{F(L)}$, $\dfrac{\partial L}{\partial r} = \dfrac{F(L) - LF''(L)}{pF(L)F''(L)}$, $\dfrac{\partial L}{\partial B} = -\dfrac{F'(L)}{pF(L)F''(L)}$.
(c) Siden $F(L) = (rL+B)/p > 0$, $F'(L) > 0$ og $F''(L) < 0$, følger det at $\partial p/\partial r > 0$, $\partial p/\partial B > 0$, $\partial L/\partial r < 0$ og $\partial L/\partial B > 0$.

64. $f_{\text{maks}} = f(0,1) = 1$.

65. (a) $4e^{-1} - 6e^{-2}$. (b) $\mathbf{X} = 2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} - \mathbf{D}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{AD} - \mathbf{C}$.

66. Entydig løsning når $a \neq -9$ og $a \neq 2$. Løsninger med 1 frihetsgrad når $a = -9$. Ingen løsninger når $a = 2$.

67. (a) $\mathrm{El}_x\, y = xy/(1-2y)$. (b) Differensiering gir likningssystemet

$$\alpha u^{\alpha-1}\,du + \beta v^{\beta-1}\,dv = 2^\beta\,dx + 3y^2\,dy$$
$$\alpha u^{\alpha-1}v^\beta\,du + u^\alpha \beta v^{\beta-1}\,dv - \beta v^{\beta-1}\,dv = dx - dy$$

I punktet P er $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{2^{-\beta}}{\alpha}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{2^{-\beta}}{\alpha}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{2^\beta - 2^{-\beta}}{\beta 2^{\beta-1}}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{2^{-\beta}+3}{\beta 2^{\beta-1}}$.
(c) $u(0.99, 1.01) \approx u(1,1) + u_x'(1,1)\cdot(-0.01) + u_y'(1,1)\cdot 0.01$, osv.

68. (a) h er strengt voksende i $(-\infty, \frac{1}{2}\ln 2\,]$ og strengt avtagende i $[\frac{1}{2}\ln 2, \infty)$. $x = \frac{1}{2}\ln 2$ er et maksimumspunkt.
(b) Den inverse funksjonen er $h^{-1}(x) = \ln(1 - \sqrt{1-8x^2}\,) - \ln(2x)$, $x \in (0, \frac{1}{3})$
(c) Nei. Hvis for eksempel $g(x) = e^x/(1+e^x)$, så er $f'(x) > 0$ for alle x.

69. (a) $|\mathbf{A}_t| = 2(t+1)$ (b) $x = 3/2$, $y = s - 1/2$, $z = s$, $s \in \mathbb{R}$

70. (a) $f_1' = 2x(xy+1) + (x^2+y^2)y$, $f_2' = 2y(xy+1) + (x^2+y^2)x$,
$f_{11}'' = 6xy + 2$, $f_{12}'' = f_{21}'' = 3x^2 + 3y^2$, $f_{22}'' = 6xy + 2$
(b) $(0,0)$ er et lokalt minimumspunkt og de andre er sadelpunkter.
(c) Maksimum $a^2(1 + \frac{1}{2}a^2)$ i $(\frac{1}{2}a\sqrt{2}, \frac{1}{2}a\sqrt{a}\,)$ og i $(-\frac{1}{2}a\sqrt{2}, -\frac{1}{2}a\sqrt{a}\,)$.

71. (a) Arealet $= 16(2\ln 2 - 1) \approx 6.18$ (b) $a^a(\ln a - 1)$

4120n007 11.8.2003 774

72. (a) $|\mathbf{A}| = (a-1)(a-2)$ (b) Entydig løsning hvis og bare hvis $a \neq 1$ and $a \neq 2$. For $a = 1$ er det ingen løsninger, og for $a = 2$ er det uendelig mange løsninger. (c) $a = 2$ og $b_1 = b_2$, eller $a = 1$ og $b_1 - b_2 + b_3 = 0$ (d) Ta determinanten på hver side.

73. Maksimum = 1 i $(3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10}, 0)$ og i $(-3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10}, 0)$

74. (a) $\pi(x,y) = px - (cx + y + d)$. Bruk så $p = -x/a + b/a + R(y)/a$.
(c) $\dfrac{\partial y^*}{\partial b} = \dfrac{-R'(y^*)}{(b-ac)R''(y^*) + (R'(y^*))^2 + R(y^*)R''(y^*)}$
(d) $x^* = \dfrac{2a(b-ac)}{4a-\alpha^2}$, $y^* = \dfrac{\alpha^2(b-ac)^2}{(4a-\alpha^2)^2}$

75. (a) Det er naturlig å vente at $f'(y) < 0$, for om investeringen i spesialmaskiner øker, bør arbeidslønn per produsert støvsuger gå ned. Det er også naturlig å vente at $f''(y) > 0$, fordi arbeidslønnen per produsert støvsuger antagelig faller langsommere etter hvert som investeringene i spesialmaskiner øker. Nettoutbyttet er $\pi(x,y) = -bx^2 + (a-r)x - d - ky - xf(y)$. De partielle deriverte er $\pi_1'(x,y) = -2bx + (a-r) - f(y)$, $\pi_2'(x,y) = -k - xf'(y)$, $\pi_{11}'(x,y) = -2b$, $\pi_{12}'(x,y) = \pi_{21}'(x,y) = -f'(y)$, $\pi_{22}'(x,y) = -xf''(y)$.
(b) Bruk førsteordensbetingelsene. (c) $2bk(y+\beta)^3 - \alpha(a-r)(y+\beta) + \alpha^2 = 0$
(d) $\dfrac{dy}{dk} = \dfrac{2b}{(f'(y))^2 + f''(y)(f(y) - (a-r))}$

76. (a) $|\mathbf{A}_t| = 2t^2 - 2t + 1 \neq 0$ for alle t, så $\mathbf{A}_t^{-1}$ eksisterer for alle t.
(b) For $t = 1$ er $\mathbf{A}_1^{-1} = \mathbf{A}_1^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

77. (i) 447/14. (*Vink:* Substituer $u = (2+x)^{1/3}$.)
(ii) $3x^{2/3}e^{x^{1/3}} - 6x^{1/3}e^{x^{1/3}} + 6e^{x^{1/3}} + C$. (*Vink:* Substituer $u = \sqrt[3]{x}$.)

78. $x = \dfrac{1}{a}\ln\Big(\dfrac{\sqrt{A^2+4a^2c} - A}{2a}\Big)$, $y = \dfrac{1}{b}\ln\Big(\dfrac{2ac}{\sqrt{A^2+4a^2c} - A} - 1\Big)$

79. (a) $\mathrm{El}_x\, y = 2/(9e) - 1/3 \approx -0.25$, $\mathrm{El}_x\, z = -1 - 2/(3e) \approx -1.25$.
(b) Hvis x øker fra 1 til 1.1, altså med 10 %, så avtar y med omtrent 2.5 % og z avtar med omtrent 12.5 %.

80. (a) $g'(x) = (a-1)(1 - c^a x^{-a})$ og $g''(x) = a(a-1)c^a x^{-a-1}$. $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. (b) $g_{\min} = g(c) = a(c-1)$. (c) Bruk skjæringssetningen.

81. $\displaystyle\int \frac{dv}{1-v^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right| + C,$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{-x}}} = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-e^{-x}}}{1-\sqrt{1-e^{-x}}}\right) + C_1$. (*Vink:* Substituer $u = \sqrt{1-e^{-x}}$.)

82. (a) $|\mathbf{A}_a| = 2a^3 - 6a^2 + 6$ og $\mathbf{A}_a^2 = \begin{pmatrix} 2a^2+1 & a^2+3a & a^2+4a \\ a^2+3a & 2a^2+4 & a^2+5a \\ a^2+4a & a^2+5a & 2a^2+9 \end{pmatrix}$
(b) Systemet har entydig løsning hvis og bare hvis $|\mathbf{A}_a| \neq 0$, det vil si hvis og bare hvis $2a^3 - 6a^2 + 6 \neq 0$. For $a = 3$ er løsningen av systemet $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. (c) Løsningen av systemet er $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 1$, $x_n = 2 - n$. (d) $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{CB}$.

83. (a) $x_1 = (m + 18p_1 - 5p_2 - 4p_3)/4p_1$, $x_2 = (m - 6p_1 + 5p_2 - 4p_3)/2p_2$,
$x_3 = (-6p_1 - 5p_2 + 12p_3)/4p_3$.
(b) $U^* = -3\ln 4 - \ln p_1 - 2\ln p_2 - \ln p_3 + 4\ln(m - 6p_1 - 5p_2 - 4p_3)$,
$\partial U^*/\partial m = 4(m - 6p_1 - 5p_2 - 4p_3)^{-1} = \lambda$. (c) $\Delta U^* \approx \lambda\Delta m = 0.1 \cdot 1 = 0.1$.

4120n007 11.8.2003 774

84. (a) $\dot{K} = \gamma K^\alpha(\beta t + L_0)$ (b) $K = \left((1-\alpha)\gamma\left(\frac{\beta}{2}t^2 + L_0 t\right) + K_0^{1-\alpha}\right)^{1/(1-\alpha)}$

85. $x = \pm 1$ er (globale) minimumspunkter, $x = 0$ er et lokalt maksimumspunkt.

86. (a) $(x, y, z) = (4, 0, 0)$ gir maksimum, mens alle punkter $(x, y, z) = (-1, y, z)$ med $y^2 + z^2 = 15/2$ gir minimum. (b) Maksimumspunktet er det samme som i (a). Minimum i $(x, y, z) = (-1/2, 0, 0)$.

87. (a) $|\mathbf{A}_a| = (a+1)(a-1)(a-2)$. (b) Systemet har entydig løsning hvis og bare hvis $|\mathbf{A}_a| \neq 0$, dvs. hvis og bare hvis $a \neq \pm 1$ og $a \neq 2$. Hvis $a = 1$, har systemet ingen løsning hvis $b \neq 2$. Hvis $a = 2$, har systemet ingen løsning hvis $b \neq 12$.
(c) $|3\mathbf{A}_3| = 216$, $|\mathbf{A}_5\mathbf{A}_4^{-1}\mathbf{A}_3^2| = 768/5$.

88. (a) (i) $-6e^{-x/2}(x+2)+C$. (*Vink:* Delvis integrasjon.) (ii) $10 - 18\ln(14/9)$. (*Vink:* Substituer $u = 9 + \sqrt{x}$.) (iii) $886/15$. (*Vink:* Substituer $u = \sqrt{t+2}$.)
(b) $x(t) = \dfrac{B}{2t-a}e^{-a/(2t-a)}$, der B er en konstant.

89. (a) $z_1'(e, e) = 1/2$, $z_{11}''(e, e) = 11/(16e)$. (b) $y' = 1/(F'(0) + 1)$

90. (a) $f'(x) = 4x(1 - \frac{1}{2}a - x^2)e^{-x^2-a}$. For $a < 2$ har f tre stasjonære punkter: $x = 0$ og $x = \pm\sqrt{1 - a/2}$. For $a \geq 2$ er $x = 0$ det eneste stasjonære punktet. (b) Grafen er symmetrisk om y-aksen, siden $f(-x) = f(x)$ for alle x. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. (c) $M(a)$ er størst for $a = 0$. (d) Eneste stasjonære punkt for g er $(0, 1)$. Maksimumsverdien er $2e^{-1}$, som oppnås i punktene $(\pm 1, 0)$.

91. (a) 9. (*Vink:* Substituer $u = x^2 + x + 2$.) (b) *Vink:* Likningen er separabel.

92. (a) $y' = 7$.
(b) $\dfrac{dx}{dz} = \dfrac{1}{D}\Big[2z\big(xe^y + f(z)\big) - xyf'(z)\dfrac{\partial g}{\partial y}\Big]$, $\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{1}{D}\Big[yf'(z)\Big(g + x\dfrac{\partial g}{\partial x}\Big) - 2ze^y\Big]$,

der $D = \begin{vmatrix} e^y & xe^y + f(z) \\ g + x\dfrac{\partial g}{\partial x} & x\dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = xe^y\dfrac{\partial g}{\partial y} - \big(xe^y + f(z)\big)\Big(g + x\dfrac{\partial g}{\partial x}\Big)$.

93. (a) Entydig løsning for $a \neq 3$.
(b) Ingen slik lineær kombinasjon hvis $a = 3$ og $b \neq -1$.
(c) $\mathbf{X} = (\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}$. Med de gitte verdiene for $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$ får vi

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

94. (a) $\ln\left|\dfrac{\sqrt{u}-1}{\sqrt{u}+1}\right| + C$. (b) $\ln\left|\dfrac{\sqrt{e^y+1}-1}{\sqrt{e^y+1}+1}\right| + C$.

95. (a) $|\mathbf{A}_3(t)| = -t^3 + 3t^2 - 4t + 2$, $|\mathbf{A}_4(t, a)| = t^4 - 3t^3 + 4t^2 - 2t - a$.
(c) Løsning hvis og bare hvis $b_1 - 2b_2 + 2b_3 = 0$. En frihetsgrad.
(d) $\mathbf{P}^2$, $\mathbf{P} + \mathbf{P}$ og $\mathbf{P}'$ er helt sikkert invertible. $\mathbf{P} + \mathbf{P}'$ behøver ikke ha invers.

96. (a) $y' = -\dfrac{y+2}{x+2y+2}$, $y'' = \dfrac{2(y+2)(x+y)}{(x+2y+2)^2}$.
(b) $x^* = 5/3 - m/24$, $y^* = m/8 - 1$, $\lambda = m/48 + 1/6$. (c) $dU^*(20)/dm = 7/12$.
(d) For $m \leq 8$ er $x^* = m/6$ and $y^* = 0$. For $m \geq 40$ er $x^* = 0$ and $y^* = m/10$.

97. (a) $V_\varphi = [-\ln 2, 0)$. (b) $\varphi^{-1}(x) = \dfrac{2e^x - 1}{1 - e^x}$ for x i $[-\ln 2, 0)$.
(c) $(\varphi')^{-1}(x) = -\dfrac{3}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{x}}$.

98. (a) $\mathbf{A}_t$ har invers $\iff t \neq -1$.

4120n007 11.8.2003 774

(b) $\mathbf{I}_3 - \mathbf{BA}_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -t \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1-t \end{pmatrix}$ har ikke invers for noen verdi av t.

$\mathbf{X} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{BA}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. (c) $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

99. $y' = -y/x, \;\; y'' = 2y/x^2$.

100. (a) $\dfrac{2x^{2n+1/2}}{4n+1} - \dfrac{4x^{n+m+1/2}}{2n+2m+1} + \dfrac{2x^{2m+1/2}}{4m+1} + C$ (b) $\frac{1}{3} - \ln(e^{1/3}+1) + \ln 2$.

(c) Løsningen er gitt implisitt ved $\dfrac{3}{5a^2}(ax+b)^{5/3} - \dfrac{3b}{2a^2}(ax+b)^{2/3} = \dfrac{1}{3}t^3 + C$, der C er en konstant. Venstresiden i denne ligningen kan også skrives som $\dfrac{3x}{2a}(ax+b)^{2/3} - \dfrac{9}{10a^2}(ax+b)^{5/3}$ eller $\dfrac{3}{10a^2}(ax+b)^{2/3}(2ax-3b)$. Differensialligningen har også den konstante løsningen $x \equiv -b/a$ (forutsatt at $b \neq 0$).

101. (a) Hesse-matrisen er $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 4(1-\rho^2)y^2 - 6 & 8(1-\rho^2)xy + 2\rho \\ 8(1-\rho^2)xy + 2\rho & 4(1-\rho^2)x^2 - 6 \end{pmatrix}$.

Hvis $\rho = \pm 1$, har f bare ett stasjonært punkt, nemlig $(0,0)$, og det er et globalt maksimumspunkt for f.

(b) $x_0 f_1'(x_0, y_0) - y_0 f_2'(x_0, y_0) = -6x_0^2 + 6y_0^2$.

(c) $(0,0)$, (p,p), $(-p,-p)$, $(q,-q)$, $(-q,q)$, der $p = \sqrt{\dfrac{3-\rho}{2(1-\rho^2)}}$, $q = \sqrt{\dfrac{3+\rho}{2(1-\rho^2)}}$.

102. (a) $|\mathbf{A}| = -a(a-1)^2$. (b) $a = b = 1$. (c) $\mathbf{B}$ fins hvis og bare hvis $a \neq 1$.

103. (a) $V(x) = Ae^{-ax} - b/a$. (b) Med 20 liter på tanken kan bilen kjøre $10\ln(27/7)$ mil (≈ 13.5 mil). For å kunne kjøre 15 mil må bilen starte med minst $7e^{1.5} - 7$ liter (≈ 24.37 liter).

104. (i) $1/5$ (ii) $7 + 2\ln 2$

105. (a) $y' = 3$ (b) *Vink:* Kurven skjærer x-aksen i punkter hvor $y = 0$, og der må vi ha $e^{-x} = x + 2$.

106. (a) Med Lagrange-funksjonen $\mathcal{L}(x,y,z) = xyz - \lambda(x+y+z-5) - \mu(xy+xz+yz-8)$ får vi de nødvendige førsteordensbetingelsene

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad \mathcal{L}_1'(x,y,z) = yz - \lambda - \mu(y+z) = 0 \\
&(2) \qquad \mathcal{L}_2(x,y,z) = xz - \lambda - \mu(x+z) = 0 \\
&(3) \qquad \mathcal{L}_3(x,y,z) = xy - \lambda - \mu(x+y) = 0
\end{aligned}
$$

(c) Maksimumsverdien av $f(x,y,z)$ er $112/27$, som oppnås i de tre punktene $(7/3, 4/3, 4/3)$, $(4/3, 7/3, 4/3)$, $(4/3, 4/3, 7/3)$, alle med $\lambda = -16/9$ og $\mu = 4/3$.
(d) $\Delta f^* \approx \lambda \cdot 0.01 + \mu(-0.01) = -\frac{28}{9} \cdot 0.01 \approx -0.031$.

107. (a) $f'(x) = e^{x-3}/(2 + e^{x-3}) > 0$. $V_f = (\ln 2, \infty)$. (b) $g(x) = 3 + \ln(e^x - 2)$ for alle $x > \ln 2$. ($D_g = V_f$.) (c) $f'(3) = 1/3$, $g'(\ln 3) = 3$.

108. (a) $|\mathbf{A}| = (q-2)(p+1)$, $|\mathbf{A} + \mathbf{E}| = 2(1-p)(2-q)$.

$$\mathbf{AE} = \begin{pmatrix} q & -1 & q-2 \\ 1 & -p & 2-p \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q-3 & 2q-3 & 2q-3 \\ 3-2p & 3-2p & 3-2p \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $\mathbf{A} + \mathbf{E}$ har invers $\iff p \neq 1$ og $q \neq 2$. $|\mathbf{BE}| = 0$, så $\mathbf{BE}$ har ikke invers.

(c) $r(\mathbf{A}) = 3$ hvis $p \neq -1$ og $q \neq 2$, $r(\mathbf{A}) = 2$ ellers.

4120n007 11.8.2003 774

(d) $\begin{cases} p \neq -1 \text{ og } q \neq 2: & \text{Ingen løsning.} \\ p = -1: & \text{Entydig løsning.} \\ p = 1/2: & \text{Ingen løsning.} \\ p \neq 1/2 \text{ og } q = 2: & \text{Entydig løsning.} \end{cases}$

109. (a) 195/4. (*Vink:* Substituer $u = \sqrt[3]{19x^3 + 8}$.) (b) $x = (2e^{1-e^{-3t}} - 1)^{1/3}$

110. (a) f oppnår sin maksimumsverdi $f_{\text{maks}} = 17/16$ i $(\pm\sqrt{15}/4, 0, 1/8)$ (med $\lambda = 1$) og sin minimumsverdi $f_{\min} = -1/2$ i $(0, 0, -1/2)$ (med $\lambda = -1/4$).
(b) $\Delta f_{\text{maks}} \approx \lambda \cdot 0.02 = 0.02$.

111. $x = \left(\dfrac{4}{\varphi(t)^2} - 9\right)^{1/3}$, der $\varphi(t) = t\ln t - t + 2/3$.

112. (a) 30. (b) $\int_0^{10}(1 + 0.4t)e^{-0.05t}\,dt = 180 - 260e^{-0.5} \approx 22.302$.

113. $\text{El}_x\, y = \dfrac{3 + \dfrac{px}{x+a}}{3 - \dfrac{qy}{y+b}}$.

114. (a) Løsning(er) hvis og bare hvis $-3b_1 + b_2 - b_3 = 0$. 1 frihetsgrad.
(b) Nei, da måtte $\mathbf{A}$ være nullmatrisen.
(c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -5s & -5t & -5u \\ 14s & 14t & 14u \\ 11s & 11t & 11u \end{pmatrix}$, der s, t og u ikke alle er 0.

115. (a) Det fins tre løsninger av førsteordensbetingelsene: $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, \ln\sqrt{6})$, $(x_2, y_2, z_2) = (1, 1/2, \ln 2)$ og $(x_3, y_3, z_3) = (-1, -1/2, \ln 2)$. De tilsvarende verdiene av λ er henholdsvis $\lambda_1 = \sqrt{6}/12$ og $\lambda_2 = \lambda_3 = 1/4$. $f_{\text{maks}} = 5/2$ oppnås i (x_2, y_2, z_2) og (x_3, y_3, z_3). (b) $\Delta f^* \approx \frac{1}{4} \cdot 0.1 = 0.025$. (c) Nei.

116. (a) $f'(x) = 2(e^{2x} + ae^{-x})(2e^{2x} - ae^{-x})$, $f''(x) = 16e^{4x} + 2ae^x + 4a^2e^{-2x}$.
(b) For $a > 0$ er f voksende i $[\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}a, \infty)$. For $a < 0$ er f voksende i $[\frac{1}{3}\ln(-a), \infty)$.
(d) For $a > 0$ er $x = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}a$ et globalt minimumspunkt, og for $a < 0$ er $x = \frac{1}{3}\ln(-a)$ et globalt minimumspunkt. (e) Minimum for $x = 1$.

117. $-1/2$.

118. (a) $2\ln(1 + e^{\sqrt{x}}) + C$. (*Vink:* Substituer $u = 1 + e^{\sqrt{x}}$.)
(b) $(8e^3 + 4)/9$. (*Vink:* Delvis integrasjon.)

119. $4\sqrt{x} - 4$.

120. (a) $x = Ce^{-2t} + 1$. (b) $w(t) = -e^{-2t} + t + 1$.

121. (a) $f_{\text{maks}} = f(4, \sqrt{3}) = e^4\sqrt{3}$. (b) 0.5 %.

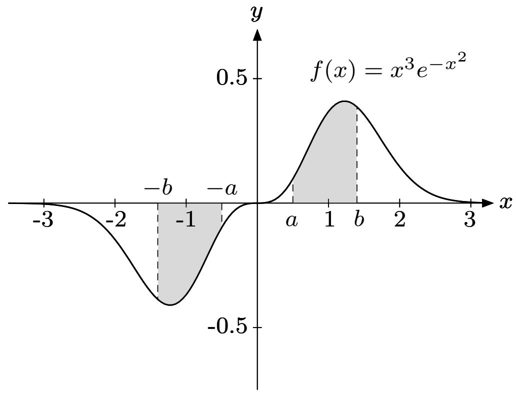
122. (a) $f'(x) = 2x^2e^{-x^2}(\frac{3}{2} - x^2)$, $f''(x) = 2xe^{-x^2}(3 - 7x^2 + 2x^4)$
(b) $f(-x) = -f(x)$. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. (c) (Globalt) minimumspunkt i $x = -\sqrt{6}/2$, (globalt) maksimumspunkt i $x = \sqrt{6}/2$. ($x = 0$ er et vendepunkt, ikke et ekstrempunkt.) (d) $\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(-x^2e^{-x^2} - e^{-x^2}\right) + C$, $\int_0^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.
(e) De to arealene er angitt på figur A.122. Siden grafen er symmetrisk om origo, må de to arealene være like. Alternativt kan du bruke identiteten $f(-x) = -f(x)$ og substitusjonen $t = -x$ til å vise at $\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx = -\int_a^b f(t)\,dt$.

123. (a) $12\sqrt{3} - 44/3$ (≈ 42.1). (b) $a^2\ln a$.

124. (a) Entydig løsning for $p \neq 3$. For $p = 3$ og $q \neq -1$ fins det ingen løsning. For $p = 3$ og $q = -1$ fins det løsninger med 1 frihetsgrad.
(b) $x_1 = t + 3$, $x_2 = -2t - 4$, $x_3 = t$, der t er vilkårlig. (c) 1.
(d) *Vink:* $(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3) = \mathbf{I} - \mathbf{A}^4$.

125. (a) $f_1'(x, y) = ye^{4x^2-5xy+y^2}(8x^2 - 5xy + 1)$, $f_2'(x, y) = xe^{4x^2-5xy+y^2}(2y^2 - 5xy + 1)$.
(b) Stasjonære punkter: $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. (c) $y' = 2$.

4120n007 11.8.2003 774



Figur A.122.

126. (a) $x = 1$ er et minimumspunkt. Det fins ikke noe maksimumspunkt.
(b) $32/3 - 4\ln 3$. (*Vink:* Substituer $u = \sqrt{x} + 1$.)

127. (a) $3 - 6/e$. (*Vink:* Delvis integrasjon.) (b) $x = 5\sqrt{3e^{-t} + 1}$, $\dot{x}(0) = -15/4$

128. (a) $4a^2+3$ (b) Hvis $a \neq 0$ and $a \neq 1$, har systemet en frihetsgrad. Hvis $a = 0$, har det to frihetsgrader. Hvis $a = 1$, fins det ingen løsninger. (c) $\mathbf{A}^4\mathbf{B} = \mathbf{A}^2(\mathbf{A}^2\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2(\mathbf{AB})$, osv.

129. (a) Eneste mulige løsning er $(x, y, z) = (0, -1/2, 3/2)$. (b) Eliminer z fra bibetingelsene og vis at x and y må være begrensede. Vis deretter at også z må være begrenset. Dessuten er mengden av tillatte punkter lukket. (Den er en kurve i $\mathbb{R}^3$.)

130. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2(e+1)}{e+2}$, $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{-2e}{e+2}$, $\mathrm{El}_x\, y = \dfrac{-2(e+1)}{e+2}$

131. (a) $|\mathbf{A}| = a^3 - 2a^2 + a = a(a-1)^2$, $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 2a^2+1 & 2a^2+a & a^2+2a \\ 2a^2+a & 3a^2 & 2a^2+a \\ a^2+2a & 2a^2+a & 2a^2+1 \end{pmatrix}$
(b) Hvis $a \neq 0$ og $a \neq 1$, så er $|\mathbf{A}| \neq 0$, og systemet har bare den ene løsningen $x = y = z = 0$, med 0 frihetsgrader. For $a = 0$ har systemet én frihetsgrad, og for $a = 1$ har det to frihetsgrader. (c) For $a = 1$ er løsningen $x = 1 - t - s$, $y = t$, $z = s$, for vilkårlige s og t. For $a = 0$ er $x = 1$ and $z = 1$, og y vilkårlig. For $a \neq 0$ og $a \neq 1$, er $x = 1 + a$, $y = -a - 2$ and $z = 1 + a$.

132. For $a \neq 0$ er $(1, 0)$ et lokalt minimumspunkt og $(1 - a^3, a^2)$ et sadelpunkt. For $a = 0$ er $(1, 0)$ et sadelpunkt. (Annenderiverttesten kan ikke brukes når $a = 0$.)

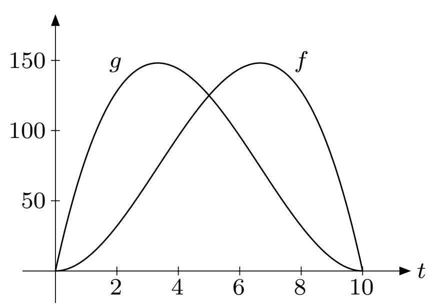


Figure A.133

133. (a) See figur A.133. (f oppnår maksimumsverdien $4000/27 \approx 148$ for $t = 20/3$. g oppnår maksimumsverdien $4000/27$ for $t = 10/3$.) (b) $\int_0^t \big(g(\tau) - f(\tau)\big)\, d\tau = \frac{1}{2}t^2(t-10)^2 \geq 0$ for alle t. (c) $\int_0^{10} p(t)f(t)\, dt = 940 + 11\ln 11 \approx 966.38$, $\int_0^{10} p(t)g(t)\, dt = 3980/3 - 121\ln 11 \approx 1036.52$. Man bør velge profil g.

134. (a) $x = \frac{1}{5}(2e^{-4t} + 3e^{t})$
(b) $x = \frac{1}{3}\ln\bigl(6\sqrt{t+8} - 18\ln(3+\sqrt{t+8}\,) + C\bigr)$, $C = 18\ln 6 - 17$.

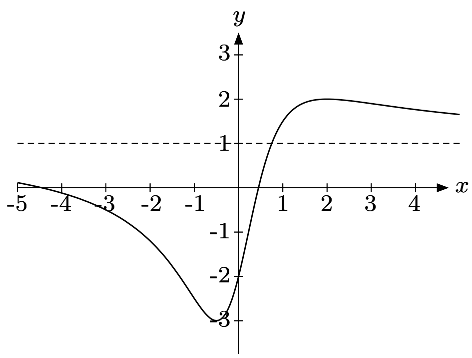


Figure A.135a

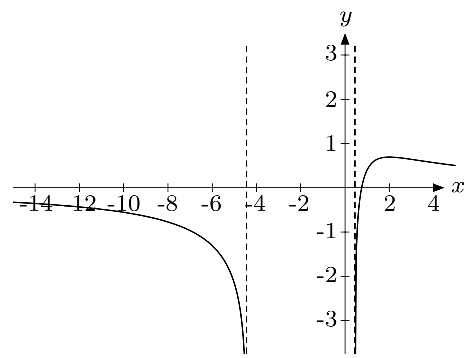


Figure A.135b

135. (a) $f'(x) = \dfrac{-4(x-2)(x+\frac{1}{2})}{(x^2+1)^2}$. $(\frac{1}{2}, -3)$ er et lokalt minimumspunkt, og $(2,2)$ er et lokalt maksimumspunkt. (b) $f(x) \to 1$ når $x \to \pm\infty$. Se figur A.135a.
(c) $F(x)$ er definert når $f(x) > 0$, dvs. for $x > \sqrt{6} - 2$ og for $x < -\sqrt{6} - 2$. Verdimengden til F er $(-\infty, \ln 2]$. Se figur A.135b.

136. (a) $k = \sqrt[3]{36\pi} \approx 4.84$ (b) $M(t) = (1 - \frac{1}{3}st)^3$. (c) $s = \frac{1}{25}(1 - 2^{-1/3})$. Det tar $75/(1 - 2^{-1/3}) \approx 364$ dager før hele møllkula har fordampet.

137. (a) $1 + \ln\frac{9}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$. (*Vink:* Substituer $u = 1 + \sqrt{x}$.)

138. (a) $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ (b) $\Delta f^* \approx \lambda_1 \cdot (0.02) + \lambda_2 \cdot (-0.02) = 0.01(3 - e) \approx 0.0028$.

139. (a) $|\mathbf{A_a}| = (a-1)(a-2)$, så $\mathbf{A}$ har en invers hvis og bare hvis $a \neq 1$ og $a \neq 2$.
(b) $\mathbf{A}_0^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
(c) $\mathbf{X} = 2\mathbf{A}^{-2}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$ og $\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} - \mathbf{A}^{-2}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}$.

140. (a) $(\frac{1}{2}, \ln 2 - \frac{3}{2})$ er et (globalt) minimum. (b) Bruk skjæringssetningen. Se Figur A.140a. (c) $x = 1/2$ er et lokalt (men ikke globalt) maksimumspunkt for g. (d) Se figur A.140b.

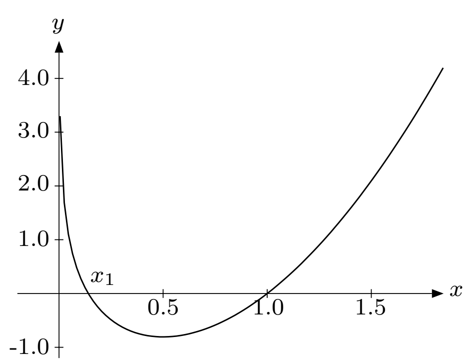


Figure A.140a

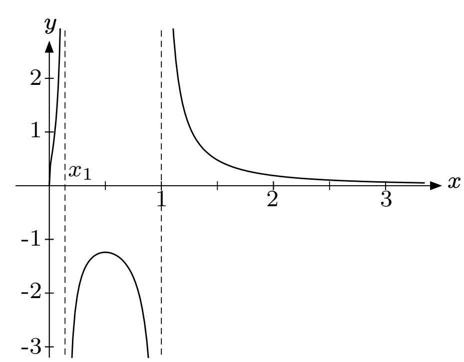


Figure A.140b

141. (a) $f_1'(x,y) = xe^y - x^2$, $f_2'(x,y) = \frac{1}{2}x^2e^y - e^{3y} - 3ye^{3y}$,
$f_{11}''(x,y) = e^y - 2x$, $f_{12}''(x,y) = xe^y$, $f_{22}''(x,y) = \frac{1}{2}x^2e^y - 6e^{3y} - 9ye^{3y}$
(b) $(0, -\frac{1}{3})$ er et sadelpunkt, $(e^{-1/6}, -\frac{1}{6})$ er et lokalt maksimumspunkt. Det fins ingen (globale) ekstrempunkter. (Studer $f(x,0)$ når $x \to \pm\infty$.)
(c) $y' = -f_1'(2,0)/f_2'(2,0) = 2$

4120n007 11.8.2003 774

142. (a) $|\mathbf{A}| = 0$ (b) Systemet har løsninger hvis og bare hvis $3b_1 - 3b_2 + b_3 = 0$. (Bruk Gauss-eliminasjon.)

143. (a) $x(t) = 2e^{-2t} - e^{-4t}$ (b) $k(t) = \left(k_0 + \dfrac{a}{\alpha}\right)e^{(2\alpha s/3)[(t+1)^{3/2}-1]} - \dfrac{a}{\alpha}$

4120n007 11.8.2003 774