Universitetet i Oslo
Økonomisk institutt

Obligatorisk oppgavesett 1 i ECON3120/4120 Matematikk 2

Dato for utlevering: Torsdag 17. mars 2005

Dato for innlevering: Onsdag 6. april 2005

Innleveringssted: Blir kunngjort senere. Følg med på emnesiden til ECON4120.

Øvrig informasjon:

- Denne øvelsesoppgaven er **obligatorisk**.
- Denne oppgaven vil IKKE bli gitt en tellende karakter. En eventuell karakter er kun veiledende.
- Du må benytte en ferdig trykket forside som du finner på *http://www.oekonomi.uio.no/info/EMNER/Forside_obl_nor.doc*
- Det er viktig at øvelsesoppgaven blir levert innen fristen (se over). Oppgaver levert etter fristen vil **ikke bli rettet**.*)
- Alle øvelsesoppgaver må leveres på innleveringsstedet som blir kunngjort på nettet. Du må ikke levere øvelsesoppgaven direkte til emnelæreren eller ved e-post. Dersom du ønsker å levere inn oppgaven **før** innleveringsfristen, bes du kontakte instituttets ekspedisjonskontor i 12. etasje.
- Dersom øvelsesoppgaven ikke blir godkjent, vil du få en ny mulighet ved at du får en ny oppgave som skal leveres med en svært kort frist. Dersom heller ikke dette forsøket lykkes, vil du ikke få anledning til å avlegge eksamen i dette emnet. Du vil da bli trukket fra eksamen, slik at det ikke vil bli et tellende forsøk.

*) Dersom du mener at du har en god grunn til ikke å levere oppgaven innen fristen (for eksempel sykdom) bør du diskutere saken med emnelæreren, og søke om utsettelse. Normalt vil utsettelse kun bli innvilget dersom det er en dokumentert grunn (for eksempel legeerklæring).

Oppgave 1

Gitt funksjonen

$$g(x) = \ln[x \ln(x^{2n})]$$

der n er et naturlig tall.

(a) Hvor er g definert? (Merk at $\ln(x^{2n}) = 2n \ln |x|$, hvis du vil gjøre bruk av det.) Vis at $g(-e^{-1}) = \ln 2 + \ln n - 1$.

(b) Finn $g'(x)$, og avgjør hvor g er voksende/avtakende.

(Forts.)

Oppgave 2

Definer funksjonen f ved $f(x) = 4\,\dfrac{(\ln x)^2}{x}$ for alle $x > 0$.

(a) Beregn $f'(x)$ og $f''(x)$.

(b) Finn eventuelle lokale ekstrempunkter og vendepunkter for f.

(c) Skisser grafen til f.

(d) Beregn arealet under grafen til f over intervallet $\left[1, e^3\right]$.

(e) Drøft antall løsninger av likningen $f(x) = c$ for forskjellige verdier av c.

Oppgave 3

Beregn følgende integraler:

(a) $\displaystyle\int_1^5 \frac{x+3}{\sqrt{3x+1}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int x^2(e^x - 1)\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$

Oppgave 4

For hvert reelt tall t definerer vi matrisen $\mathbf{A}_t$ ved

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & t \\ 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & -t & 1 \\ 1 & t-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Beregn $|\mathbf{A}_t|$. For hvilke verdier av t har det homogene likningssystemet $\mathbf{A}_t\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ikke-trivielle løsninger?

(b) La $\mathbf{B}$ være en gitt $n \times n$-matrise. En $n \times n$-matrise $\mathbf{P}$ sies å *kommutere* med $\mathbf{B}$ dersom $\mathbf{BP} = \mathbf{PB}$. Vis at om $\mathbf{P}$ og $\mathbf{Q}$ kommuterer med $\mathbf{B}$, da vil også $\mathbf{PQ}$ kommutere med $\mathbf{B}$.

(c) Hvis $\mathbf{Q}$ kommuterer med $\mathbf{B}$ og $\mathbf{Q}^{-1}$ eksisterer, vil da $\mathbf{Q}^{-1}$ nødvendigvis kommutere med $\mathbf{B}$?