Universitetet i Oslo
Økonomisk institutt

Obligatorisk oppgavesett 1 i ECON3120/4120 Matematikk 2

Dato for utlevering: Mandag 20. mars 2006

Dato for innlevering: Mandag 3. april 2006

Innleveringssted: Instituttets ekspedisjonskontor i 12. etasje.

Øvrig informasjon:

- Denne øvelsesoppgaven er **obligatorisk**.
- Denne oppgaven vil IKKE bli gitt en tellende karakter. En eventuell karakter er kun veiledende.
- Du må benytte en ferdig trykket forside som du finner på *http://www.oekonomi.uio.no/info/EMNER/Forside_obl_nor.doc*
- Det er viktig at øvelsesoppgaven blir levert innen fristen (se over). Oppgaver levert etter fristen vil **ikke bli rettet**.[*)]
- Du må ikke levere øvelsesoppgaven direkte til emnelæreren eller ved e-post. Dersom du ønsker å levere inn oppgaven **før** innleveringsfristen, bes du kontakte instituttets ekspedisjonskontor i 12. etasje.
- Dersom øvelsesoppgaven ikke blir godkjent, vil du få en ny mulighet ved at du får en ny oppgave som skal leveres med en svært kort frist. Dersom heller ikke dette forsøket lykkes, vil du ikke få anledning til å avlegge eksamen i dette emnet. Du vil da bli trukket fra eksamen, slik at det ikke vil bli et tellende forsøk.

*) Dersom du mener at du har en god grunn til ikke å levere oppgaven innen fristen (for eksempel sykdom) bør du diskutere saken med emnelæreren, og søke om utsettelse. Normalt vil utsettelse kun bli innvilget dersom det er en dokumentert grunn (for eksempel legeerklæring).

Oppgave 1

Betrakt funksjonen f definert ved

$$f(x) = ae^{2x} - be^{x} \qquad \text{for alle } x,$$

der a og b er konstanter med $0 < a < b$.

(a) Vis at f har nøyaktig ett nullpunkt, x_0, og nøyaktig ett stasjonært punkt, x_1. Vis også at $x_0 - x_1$ er uavhengig av a og b.

(b) Hvor er funksjonen f positiv, hvor er den voksende og hvor er den avtagende?

(Forts.)

(c) Undersøk $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ og $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

(d) Det stasjonære punktet x_1 fra (a) avhenger av a og b. La $f^*(a,b) = f(x_1)$. Beregn $\partial f^*(a,b)/\partial a$. Vis at du får det samme ved å beregne $\hat{f}_1'(a,b,x_1)$, der $\hat{f}(a,b,x) = ae^{2x} - be^x$. (Dette er et eksempel på det såkalte omhyllingsteoremet.)

Oppgave 2

La f være en funksjon av to variabler gitt ved

$$f(x,y) = (x^2 - y)^2 + x^3 - 3x^2 \qquad \text{for alle } x \text{ og } y.$$

(a) Beregn de partielle deriverte av f av første og annen orden.

(b) Finn alle stasjonære punkter for f, og klassifiser dem ved hjelp av annenderiverttesten.

(c) Har f noen globale ekstrempunkter?

Oppgave 3

(a) Beregn integralet $\displaystyle\int_0^{\sqrt{15}} 3x\sqrt{1+x^2}\,dx$.

(b) Finn den allmenne løsningen av differensiallikningen $e^{-t}\dot{x} = x^2 \ln(1+e^t)$.

(c) Ved et studium av saltinnholdet i en innsjø ledes en til differensiallikningen

$$\dot{S}(t) - \frac{aS(t)}{t-b} = c \qquad (0 \le t < b, a \ne 1, S(t) > 0)$$

Finn den allmenne løsningen av denne differensiallikningen. Vis at når $a = 26$, $b = 200$ og $c = 2.5$, er løsningen med initialbetingelsen $S(0) = 0$ gitt ved

$$S(t) = \frac{200-t}{10} - 20\left(\frac{200-t}{200}\right)^{26}$$

Finn maksimumspunktet for denne funksjonen og skisser grafen.

(Forts.)

Oppgave 4

Betrakt matrisene

$$\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B}_b = \begin{pmatrix} b & -2 & 12 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Beregn determinanten $|\mathbf{A}_a|$. For hvilke verdier av parameteren a har $\mathbf{A}_a$ en invers?

(b) Vis at for passende verdier av a og b er produktmatrisen $\mathbf{A}_a\mathbf{B}_b$ en diagonalmatrise. Bruk resultatet til å finne den inverse matrisen til $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Vis at om $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ er $n \times n$ matriser slik at $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ og $|\mathbf{A}| \neq 0$, da er $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{BA}^{-1}$.

Oppgave 5

Undersøk om følgende funksjoner er homogene, og finn i tilfelle homogenitetsgraden.

(a) $f(x, y) = 3x^3y^{-4} + 2xy^{-2}$

(b) $Y(K, L) = (\ln K - \ln L)(K^a + L^a)^p$